



KEMENTERIAN PENDIDIKAN, KEBUDAYAAN, RISET, DAN TEKNOLOGI
REPUBLIK INDONESIA
2023

Matematika

Edisi Revisi

Dicky Susanto, dkk

SMA/MA/SMK/MAK Kelas X

Hak Cipta pada Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia

Dilindungi Undang-Undang

Penafian: Buku ini disiapkan oleh Pemerintah dalam rangka pemenuhan kebutuhan buku pendidikan yang bermutu, murah, dan merata sesuai dengan amanat dalam UU No. 3 Tahun 2017. Buku ini disusun dan ditelaah oleh berbagai pihak di bawah koordinasi Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. Buku ini merupakan dokumen hidup yang senantiasa diperbaiki, diperbarui, dan dimutakhirkan sesuai dengan dinamika kebutuhan dan perubahan zaman. Masukan dari berbagai kalangan yang dialamatkan kepada penulis atau melalui alamat surel buku@kemdikbud.go.id diharapkan dapat meningkatkan kualitas buku ini.

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)

Penulis

Dicky Susanto
Theja Kurniawan
Savitri K. Sihombing
Eunice Salim
Marianna Magdalena Radjawane
Ummy Salmah
Ambarsari Kusuma Wardani

Penelaah

Sunardi
Azhary Masta

Penyelia/Penyelaras

Supriyatno
Lenny Puspita Ekawaty
Maharani Prananingrum

Kontributor

Iman Santoso
Ali Murtandho

Ilustrator

Faris M. Naufal
M. Firdaus Jubaedi

Editor

Tri Hartini
Maharani Prananingrum

Editor Visual

Is Yuniarto Nafawi

Desainer

M. Firdaus Jubaedi

Penerbit

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi

Dikeluarkan oleh
Pusat Perbukuan Kompleks Kemdikbudristek
Jalan RS. Fatmawati, Cipete, Jakarta Selatan
<https://buku.kemdikbud.go.id>

Edisi Revisi, 2023

ISBN 978-623-118-557-0 (no.jil.lengkap PDF)
ISBN 978-623-118-558-7 (jil.1 PDF)

Isi buku ini menggunakan huruf Noto Serif 10/12 pt., SIL Open Font License.
xvii, 296 hlm.: 17,6 × 25 cm

Kata Pengantar

Pusat Perbukuan; Badan Standar, Kurikulum, dan Asesmen Pendidikan; Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi memiliki tugas dan fungsi mengembangkan buku pendidikan pada satuan Pendidikan Anak Usia Dini, Pendidikan Dasar, dan Pendidikan Menengah, termasuk Pendidikan Khusus. Buku berkaitan erat dengan kurikulum. Buku yang dikembangkan saat ini mengacu pada kurikulum yang berlaku, yaitu Kurikulum Merdeka.

Salah satu bentuk dukungan terhadap implementasi Kurikulum Merdeka di satuan pendidikan ialah mengembangkan buku teks utama yang terdiri atas buku siswa dan panduan guru. Buku ini merupakan sumber belajar utama dalam pembelajaran bagi siswa dan menjadi salah satu referensi atau inspirasi bagi guru dalam merancang dan mengembangkan pembelajaran sesuai karakteristik, potensi, dan kebutuhan peserta didik. Keberadaan buku teks utama ini diharapkan menjadi fondasi dalam membentuk Profil Pelajar Pancasila yang beriman dan bertakwa kepada Tuhan yang Maha Esa, dan berakhlak mulia; berkebinekaan global, berjiwa gotong royong, mandiri, kritis, dan kreatif.

Buku teks utama, sebagai salah satu sarana membangun dan meningkatkan budaya literasi masyarakat Indonesia, perlu mendapatkan perhatian khusus. Pemerintah perlu menyiapkan buku teks utama yang mengikuti perkembangan zaman untuk semua mata pelajaran wajib dan mata pelajaran peminatan, termasuk Pendidikan Khusus. Sehubungan dengan hal itu, Pusat Perbukuan merevisi dan menerbitkan buku-buku teks utama berdasarkan Capaian Pembelajaran dalam Kurikulum Merdeka edisi terbaru.

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkolaborasi dalam upaya menghadirkan buku teks utama ini. Kami berharap buku ini dapat menjadi landasan dalam memperkuat ketahanan budaya bangsa, membentuk mentalitas maju, modern, dan berkarakter bagi seluruh generasi penerus. Semoga buku teks utama ini dapat menjadi tonggak perubahan yang menginspirasi, membimbing, dan mengangkat kualitas pendidikan kita ke puncak keunggulan.

Jakarta, Desember 2023
Kepala Pusat Perbukuan,

Supriyatno, S.Pd., M.A.

Prakata

Puji syukur kami panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas berkat dan rahmat-Nya dalam menyelesaikan penulisan buku siswa ini. Buku ini disusun berdasarkan Capaian Pembelajaran Fase E untuk Kurikulum Merdeka. Buku ini adalah edisi revisi menyesuaikan dengan perubahan pada Capaian Pembelajaran.

Matematika sering kali dianggap pelajaran yang abstrak, sulit, dan kurang relevan dalam kehidupan. Padahal pada hakikatnya, banyak konsep dan prinsip matematika justru muncul di alam dan dekat dengan kehidupan sehari-hari. Harapan kami, buku ini dapat mengubah mispersepsi mengenai matematika dengan menggunakan pendekatan yang lebih kontekstual melalui permasalahan kehidupan nyata dan melibatkan siswa secara aktif dalam bereksplorasi dengan pertanyaan penuntun. Sebagian besar pembelajaran matematika dalam buku ini diupayakan menarik perhatian dan minat siswa sehingga “tidak merasa sedang belajar matematika”. Siswa akan diajak untuk berpikir kritis dan kreatif untuk mengembangkan keterampilan berpikir aras tinggi (HOTS). Selain itu, di banyak kesempatan siswa akan berdiskusi, berkomunikasi, bekerja sama, dan menggunakan teknologi dalam menyelesaikan permasalahan sehingga mengasah kemampuan sesuai dengan Profil Pelajar Pancasila dan keterampilan abad ke-21.

Akhir kata, kami berharap buku ini bermanfaat bagi pembelajaran matematika Fase E, dan semakin banyak siswa yang mulai menyenangi matematika dan merasakan manfaat belajar matematika.

Selamat bermatematika!

Jakarta, Desember 2023
Tim Penulis

Daftar Isi

Kata Pengantar	iii
Prakata	iv
Daftar Isi	v
Daftar Gambar	vii
Daftar Tabel	x
Petunjuk Penggunaan Buku	xi
Bab 1 Eksponen	1
A. Definisi Eksponen	4
B. Sifat-Sifat Eksponen	7
C. Fungsi Eksponenial	10
D. Bentuk Akar.....	21
Bab 2 Barisan dan Deret.....	35
A. Barisan.....	37
B. Deret	50
C. Bunga	64
Bab 3 Perbandingan Trigonometri.....	71
A. Perbandingan Trigonometri	75
B. Pemanfaatan Perbandingan Trigonometri	88
Bab 4 Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear	107
A. Sistem Persamaan Linear	110
B. Sistem Pertidaksamaan Linear.....	119
Bab 5 Persamaan dan Fungsi Kuadrat	129
A. Persamaan Kuadrat.....	132
B. Fungsi Kuadrat	149

Bab 6 Representasi dan Interpretasi Data	177
A. Representasi Data	180
B. Statistik Deskriptif	193
C. Representasi Data Lanjutan	205
Bab 7 Peluang	239
A. Distribusi Peluang.....	242
B. Aturan Penjumlahan.....	249
C. Aturan Perkalian	257
Glosarium.....	271
Daftar Pustaka.....	274
Daftar Sumber Gambar	276
Indeks.....	278
Biodata Pelaku Perbukuan	281
Biodata Penulis.....	281
Biodata Penelaah	290
Biodata Ilustrator	292
Biodata Penyunting Naskah 1	293
Biodata Penyunting Naskah 2	294
Biodata Editor Visual.....	295
Biodata Penata Letak (Desainer).....	296

Daftar Gambar

Gambar 1.1	Diagram pohon untuk ilustrasi penyebaran video.	3
Gambar 1.2	Grafik Pertumbuhan Populasi Dunia.	3
Gambar 1.3	Grafik Fungsi $f(x) = 3^x$	12
Gambar 1.4	Grafik Fungsi $f(x) = 30.(2^x)$	15
Gambar 1.5	Grafik Fungsi Peluruhan Eksponen.....	18
Gambar 2.1	Meja Segi Empat dengan Empat Kursi.....	38
Gambar 2.2	Dua Meja Segi Empat Disatukan.....	38
Gambar 2.3	Gedung Pertunjukan Seni	40
Gambar 2.4	Kertas Dilipat Satu Kali	45
Gambar 2.5	Pembelahan pada Bakteri	46
Gambar 2.6	Siswa SMA Saling Berjabat Tangan	51
Gambar 2.7	Carl Friedrich Gauss	52
Gambar 2.8	Bunga Matahari.....	69
Gambar 3.2	Puncak Jaya	73
Gambar 3.3	Gunung Everest.....	73
Gambar 3.1	Teodolit	73
Gambar 3.4	Teorema Pythagoras	74
Gambar 3.5	Pohon dan Penggaris	74
Gambar 3.6	Segitiga Sebangun 1	75
Gambar 3.7	Segitiga Sebangun 2	75
Gambar 3.8	Bayangan Tiga Orang	76
Gambar 3.9	Sisi Depan	78
Gambar 3.10	Sisi Samping	78
Gambar 3.12	Contoh Bayangan.....	78
Gambar 3.11	Sisi Miring.....	78
Gambar 3.13	Segitiga dengan Sisi XYZ	78
Gambar 3.14	Tangen adalah perbandingan sisi depan terhadap sisi samping.....	79
Gambar 3.15	Segitiga-Segitiga Sebangun dari Bayangan Tiga Orang.....	80
Gambar 3.16	Sudut Elevasi dan Sudut Depresi.....	86
Gambar 3.17	Klinometer Sederhana	87
Gambar 3.18	Piramida di Mesir	88
Gambar 3.19	Tinggi dan setengah diagonal alas Piramida	89
Gambar 3.20	Membuat replika piramida.....	90

Gambar 3.21	Membuat lorong bawah tanah	90
Gambar 3.22	Sin 30°	97
Gambar 3.23	Cos 43°	97
Gambar 3.24	Tan 55°	97
Gambar 3.25	Jam Gadang	104
Gambar 3.26	Jembatan Youtefa.....	104
Gambar 4.1	Bola yang ada di lemari sekolah.....	110
Gambar 4.2	Timbangan Bebek.....	119
Gambar 4.3	Lomba Balap Karung.....	121
Gambar 5.1	Lintasan Bola Basket.....	131
Gambar 5.2	Empat Sudut Ruang Baca dalam Kelas	132
Gambar 5.3	Ubin-Ubin Aljabar.....	136
Gambar 5.4	Ubin-Ubin Aljabar untuk $x^2 + 3x + 2 = 0$	136
Gambar 5.5	Penyusunan Ubin-Ubin Aljabar	136
Gambar 5.6	Diagram Bentuk Kuadrat.....	137
Gambar 5.7	Plot Titik pada Grafik Fungsi $f(x) = x^2$	151
Gambar 5.8	Grafik Fungsi $f(x) = x^2$	151
Gambar 5.9	Dua Jenis Grafik Fungsi Kuadrat dengan Tanda a Berbeda	154
Gambar 5.10	Karakteristik Fungsi Kuadrat	157
Gambar 5.11	Titik Potong dengan Sumbu x	158
Gambar 5.12	Busur Panah sebagai Fungsi Kuadrat	160
Gambar 5.13	Grafik fungsi kuadrat yang melalui K (-1,0), L(0,-3), dan M(1,-4).....	161
Gambar 6.1	Histogram Penggunaan Telepon Genggam oleh Siswa SMA	182
Gambar 6.2	Diagram Batang Merek Telepon Genggam yang digunakan Siswa SMA.....	182
Gambar 6.3	Tampilan Data yang Sama Menggunakan Dua Histogram yang Berbeda	183
Gambar 6.4	Diagram Batang Waktu yang Ditempuh Peserta Lintas Alam Olimpiade 1998	184
Gambar 6.5	Histogram Hasil Nilai Ulangan Matematika.....	187
Gambar 6.6	Perbandingan Diagram Lingkaran Siswa Laki-Laki dan Perempuan.....	190
Gambar 6.7	Diagram Batang Ganda Waktu Akhir Pekan Siswa	191
Gambar 6.8	Diagram Batang Buatan Dani.....	192
Gambar 6.9	Dot Plot Ukuran Sepatu.....	194

Gambar 6.10	Letak Kuartil dan Persentil dalam Kelompok Data.....	203
Gambar 6.11	Letak Q_1 dan Q_2 dalam Kelompok Data $n = 20$	204
Gambar 6.12	Letak Kuartil dalam Kelompok Data $n = 20$	204
Gambar 6.13	Diagram Box-and-Whisker Penjualan Sepatu	206
Gambar 6.14	Diagram Box-and-Whisker	207
Gambar 6.15	Diagram Box-and-Whisker Kecepatan Unduh Internet	208
Gambar 6.16	Diagram Box-and-Whisker Energi Angin dan Tenaga Surya	210
Gambar 6.17	Diagram Box-and-Whisker Kecepatan Pengisian HP dari 0 sampai 100%.....	212
Gambar 6.18	Diagram Box-and-Whisker Waktu Lama Belajar.....	213
Gambar 6.19	Diagram Pencar Buku yang Dibaca dan Nilai Ulangan Bahasa Indonesia.....	214
Gambar 6.20	Berbagai Jenis Korelasi	216
Gambar 7.2	Ruang Sampel untuk Kejadian Melempar Dadu Merah dan Dadu Putih.....	242
Gambar 7.1	Berbagai Permainan Papan (Board Game).....	242
Gambar 7.3	Gambar Uang Logam dengan Dua Sisinya	248
Gambar 7.4	Perbincangan Siswa Mengenai Peluang.....	249
Gambar 7.5	Diagram Venn untuk Dua Kejadian.....	255
Gambar 7.6	Dadu Berbentuk Limas Segitiga.....	262
Gambar 7.7	Jaring-Jaring Berbagai Dadu.....	264
Gambar 7.8	Dadu Berbentuk Oktahedral.....	266

Daftar Tabel

Tabel 1.1	Bentuk Eksponen 2^n	7
Tabel 1.2	Penularan Virus di Beberapa Fase	11
Tabel 1.3	Pertumbuhan Koloni Bakteri.....	28
Tabel 1.4	Contoh Bentuk Eksponen dan Bentuk Logaritma	29
Tabel 2.1	Banyak Meja dan Kursi.....	38
Tabel 2.2	Jumlah Lipatan Kertas dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk	45
Tabel 2.3	Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas.....	51
Tabel 2.4	Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19 dalam Waktu 5 Bulan.....	56
Tabel 2.5	Proses Menemukan Kembali Rumus Jumlah Deret Geometri.....	56
Tabel 4.1	Contoh Sistem Persamaan Linear dengan Banyaknya Solusi yang Berbeda-beda	114
Tabel 5.1	Nilai x dan y untuk fungsi $f(x) = x^2$	150
Tabel 5.2	Penghematan Bahan Bakar Terhadap Kelajuan Mobil.....	164
Tabel 6.1	Frekuensi Banyaknya Pasien Baru Covid-19	180
Tabel 6.2	Tabel Distribusi Frekuensi Catatan Waktu Atlet	186
Tabel 6.3	Waktu yang Dhabiskan Siswa di Akhir Pekan.....	190
Tabel 6.4	Data Penjualan Sepatu di Toko A.....	194
Tabel 6.5	Distribusi Frekuensi Data Kelompok Penjualan Sepatu di Toko A.....	198
Tabel 6.6	Tabel Frekuensi Data Tunggal Penjualan Sepatu di Toko A...	199
Tabel 6.7	Tabel Frekuensi Data Kelompok Diameter Pohon Borneo di Daerah A	200
Tabel 6.8	Tabel Jumlah Buku yang Dibaca dan Nilai Ulangan Bahasa Indonesia	214
Tabel 6.9	Tabel Jumlah Pohon Ditanam dan Tingkat Polusi (Level PM2.5)	218
Tabel 6.10	Perbandingan <i>Mean</i> , <i>Range</i> dan Jangkauan Interkuartil Antara Kelompok Pertama dan Kedua.....	233
Tabel 6.11	Tabel Distribusi Frekuensi Data Kelompok Durasi Baterai HP	236
Tabel 7.1	Distribusi Peluang untuk Jumlah Dua Dadu.....	246
Tabel 7.2	Distribusi Peluang untuk Jumlah Gambar pada Uang Logam.	248
Tabel 7.3	Jumlah Siswa Sesuai dengan Moda Transportasi yang Digunakan ke Sekolah pada Hari Ini.....	250
Tabel 7.4	Jumlah Siswa sesuai dengan Moda Transportasi yang Dapat Digunakan ke Sekolah	250

Petunjuk Penggunaan Buku

Kata Kunci

Kata Kunci

- eksponen
- pangkat
- fungsi eksponensial
- bentuk akar

Kata atau konsep yang merupakan kunci untuk dihubungkan dengan kata atau konsep lain. Pemahaman terhadap kata kunci menolong kalian untuk mengaitkan konsep yang satu dengan konsep lainnya.

Peta Materi

Peta Materi



Peta materi yang terdapat pada awal bab merupakan diagram yang menunjukkan alur penyajian materi bab dan subbab. Kalian perlu mencermati peta materi ini untuk mendapatkan gambaran yang luas tentang isi bab tersebut.

Ayo, Bereksplorasi



Ayo, Bereksplorasi

Kalian melakukan kegiatan ini untuk menyelidiki konsep matematika yang berkaitan dengan pembahasan materi. Eksplorasi selalu dilakukan sebelum kalian mendalami konsep matematika beserta aplikasinya.

Ayo, Berpikir Kritis



Ayo, Berpikir Kritis

Kalian berpikir kritis jika kalian dapat menganalisis informasi untuk mengambil kesimpulan atau menilai suatu hal dengan tepat. Keterampilan ini perlu kalian latih terus-menerus karena merupakan salah satu dari keterampilan abad ke-21.

Ayo, Berpikir Kreatif



Ayo, Berpikir Kreatif

Kalian berpikir kreatif jika kalian dapat membuat ide atau alternatif solusi yang baru yang berbeda dari hal umum.

Ayo, Mencoba



Ayo, Mencoba

Kalian diharapkan dapat mengerjakan soal atau kegiatan sejenis setelah diberikan penjelasan penyelesaian satu atau lebih dari satu soal.

Penguatan Karakter



Penguatan Karakter

Kalian diharapkan dapat menghayati dan menerapkan karakter-karakter profil Pancasila yang perlu dipupuk sepanjang hayat dalam kegiatan pembelajaran serta kehidupan sehari-hari.

Keamanan Digital



Keamanan Digital

Kalian dapat melihat kaitan matematika dengan keamanan saat berada di dunia maya.

Ayo, Berdiskusi



Ayo, Berdiskusi

Bertukar pikiran dengan teman-teman dan menyatakan gagasan merupakan kegiatan yang bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan sehingga dapat menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan.

Petunjuk



Petunjuk

Petunjuk untuk kalian gunakan dalam pemecahan masalah. Baca dan gunakan bagian ini jika kalian mengalami kendala saat mencari solusi dari sebuah masalah.

Tahukah Kamu?



Tahukah Kamu?

Kalian mendapatkan informasi tambahan yang berkaitan dengan materi yang sedang kalian pelajari yang merupakan aplikasi matematika dalam suatu fenomena atau peristiwa.

Ayo, Berefleksi



Ayo, Berefleksi

Merenungkan dan melihat kembali secara evaluatif dan mendalam apa yang sudah dipelajari, membandingkannya, dan menarik pelajaran atau kesimpulan sederhana.

Ayo, Mengingat Kembali



Ayo, Mengingat Kembali

Apa yang telah kalian pelajari di SMP berhubungan dengan apa yang akan kalian pelajari di kelas X. Kalian akan lebih mudah memahami materi pelajaran kelas X dengan pengetahuan yang telah dipelajari di SMP.

Ayo, Bekerja Sama



Ayo Bekerja Sama

Bekerja sama merupakan salah satu bentuk dari bergotong royong. Kalian bekerja sama untuk menyelesaikan masalah atau menjawab pertanyaan matematika sehingga pemahaman kalian terhadap materi pelajaran lebih baik lagi. Selain itu, bekerja sama memerlukan saling memahami dan menghargai satu sama lain.

Ayo, Menggunakan Teknologi



Ayo, Menggunakan Teknologi

Teknologi memudahkan kalian untuk menyelesaikan masalah atau pekerjaan matematika. Kalian dapat memanfaatkan kalkulator dan berbagai aplikasi untuk mengerjakan tugas kalian. Kalian memilih teknologi yang sesuai dengan kebutuhan kalian.

Contoh Soal

Contoh 1

Sederhanakanlah bentuk eksponen $\frac{2^5 \times 2^3}{2^2}$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}\frac{2^5 \times 2^3}{2^2} &= \frac{2^{5+3}}{2^2} \\ &= \frac{2^8}{2^2} \\ &= 2^{8-2} \\ &= 2^6\end{aligned}$$

Bagian ini diberikan untuk membantu pemahaman kalian atas konsep yang dipelajari. Perhatikan contoh soal dan kaitkan dengan penjelasan sebelumnya agar kalian merasakan manfaat bagian tersebut.

Latihan

Latihan 1.1

- Buktikan sifat eksponen nomor 6 dan 7.
- Tentukan nilai p sedemikian sehingga persamaan berikut ini tepat
 - $(3^4)^2 = 3^p$
 - $b^p \cdot b^5 = 3^9$
 - $(3\pi)^p = 27\pi^3$

Kalian mengerjakan soal-soal dengan tiga jenis tingkat kesulitan, yaitu dasar, menengah, dan tinggi. Pertanyaan pada tingkat dasar berupa jawaban pendek yang menguji pemahaman konsep dan keterampilan dasar. Tingkat menengah berupa permasalahan yang lebih terstruktur, sedangkan tingkat tinggi merupakan permasalahan aplikasi dan keterampilan aras tinggi (HOTS).

Uji Kompetensi

Uji Kompetensi

- Selesaikanlah

- $\left(\frac{x^{-5}y^4}{xy^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^7y^{-3}}{x^{-4}y^6}\right)^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0, y \neq 0$
- $\frac{(m^{10}n^{-2})^3 (m^5n^{-5})^3}{mn}, m \neq 0, n \neq 0$
- $\frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}, p \neq 0, q \neq 0$

Terdapat pada akhir bab, merupakan sarana bagi kalian untuk mengukur pencapaian kalian dalam topik bab. Kalian dapat mengerjakan sejumlah soal yang bervariasi dari yang sederhana hingga yang kompleks. Selain itu, soal dapat berupa hitungan ataupun pemahaman konsep.

Pengayaan

Pengayaan

Permainan Pangkat

Dalam permainan ini, kamu menggunakan himpunan bilangan yang diberikan untuk membuat sebuah bilangan tujuan hanya boleh menggunakan operasi pangkat atau mencari hasil kali dua bilangan.

Setiap bilangan hanya boleh digunakan sekali saja. Kamu tidak harus menggunakan semua bilangan. Adakalanya lebih dari satu cara untuk membuat bilangan tujuan, sehingga cobalah untuk melihat berapa banyak cara yang dapat kamu temukan.

Kegiatan yang dapat digunakan untuk memperluas atau memperdalam wawasan dan pemahaman atas konsep matematika yang sedang dipelajari. Materi pengayaan dapat bersifat sebagai pendalaman materi, penerapan dalam bidang teknologi/informatika, atau kegiatan eksplorasi/proyek.

Refleksi

Refleksi

Dalam bab ini kamu sudah belajar tentang bilangan eksponen dan fungsi eksponen. Ayo refleksikan pembelajaranmu dengan menjawab pertanyaan berikut.

1. Apa itu bilangan eksponen?
2. Seperti apa bentuk fungsi eksponen?
3. Apa yang membedakan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen?

Pada akhir bab atau subbab, kalian akan diajak memikirkan kembali apa yang sudah dipelajari dan seberapa dalam/tepat pemahamanmu atas pembelajaran pada bagian tersebut.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-558-7

Bab

1

Eksponen

? Apa saja permasalahan sehari-hari yang dapat diselesaikan dengan bentuk eksponen?

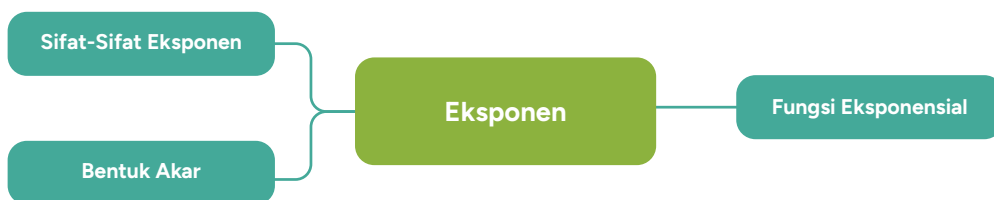
Tujuan Pembelajaran

Setelah kamu belajar bab ini, diharapkan kamu dapat mengidentifikasi sifat-sifat eksponen, bentuk akar, dan fungsi eksponensial. Selain itu, kamu juga diharapkan mampu menyelesaikan permasalahan sehari-hari yang berkaitan dengan fungsi eksponensial.

Kata Kunci

- eksponen
- pangkat
- fungsi eksponensial
- bentuk akar

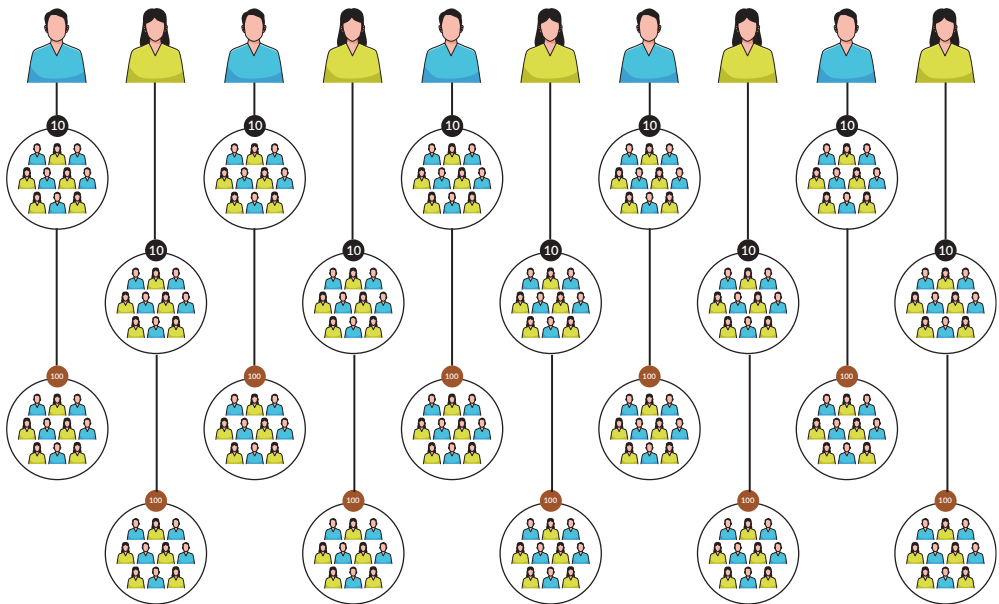
Peta Materi



Penyebaran virus, peredaran video yang viral, dan pertumbuhan penduduk dunia memiliki satu kesamaan yaitu setiap fenomena dapat dijelaskan oleh pertumbuhan eksponen.

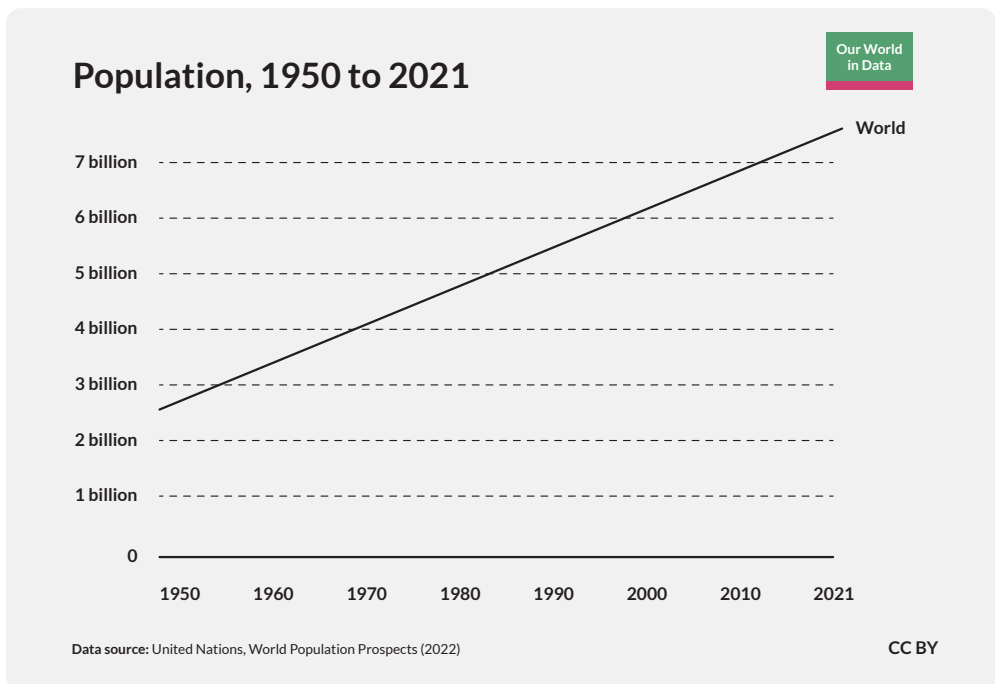
Layaknya penyebaran virus yang berlipat ganda dari orang ke orang, rumah ke rumah, kota ke kota, begitu pula penyebaran video atau konten yang menarik di media sosial. Daya tarik sebuah konten di media sosial dapat membuat penyebaran konten melonjak dengan cepat disampaikan ke jutaan bahkan miliaran penonton.

Bayangkan penyebaran mulai dari 10 penonton pertama yang masing-masing menceritakan dan membagikan video tersebut ke 10 orang lainnya. Dalam fase penyebaran pertama ini, sudah ada penambahan 100 orang penonton!



Gambar 1.1 Diagram pohon untuk ilustrasi penyebaran video.

Kamu juga dapat membayangkan dengan pola yang sama, pertumbuhan penduduk dunia terjadi. Simak grafik pertumbuhan populasi dunia berikut ini.



Gambar 1.2 Grafik Pertumbuhan Populasi Dunia.

Eksponen merupakan konsep matematika yang ada di sekitar kita dan sangat bermanfaat bagi pemecahan masalah manusia. Kamu akan mempelajari konsep ini pada bab pertama.



Ayo, Mengingat Kembali

Perkalian berulang adalah perkalian yang dilakukan secara berulang dengan faktor yang sama.

Perhatikan contoh berikut ini.

1. $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ditulis dengan 2^6
2. $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$ ditulis dengan 5^8
3. $15 \times 15 \times 15 \times 15$ ditulis dengan 15^4
4. $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$ ditulis dengan 7^{10}
5. $a \times a \times a \times a \times a \times a \times a \times a$ ditulis dengan a^7

A. Definisi Eksponen

Eksplorasi 2.1 Penyebaran Hoaks



Ayo, Bereksplorasi

Seseorang membagikan pesan berisi informasi yang salah (hoaks) kepada 2 orang temannya. Berikut isi pesannya.

Bagi-bagi kuota dalam rangka Hari Kemerdekaan Republik Indonesia. Kirimkan pesan ini kepada 2 orang temanmu dan dapatkan kuota data sebesar 1GB.

13.37



Keamanan Digital

Coba diskusikan unsur-unsur apa saja pada isi pesan ini yang menunjukkan bahwa informasinya salah (hoaks)?

Setelah membaca pesan ini, kedua orang tersebut mengikuti arahan dan membagikan pesan yang sama kepada 2 orang lainnya. Dengan asumsi setiap orang yang menerima pesan ini tidak mengetahui bahwa ini adalah hoaks, bayangkan betapa cepat hoaks ini akan tersebar.



Ayo, Mencoba

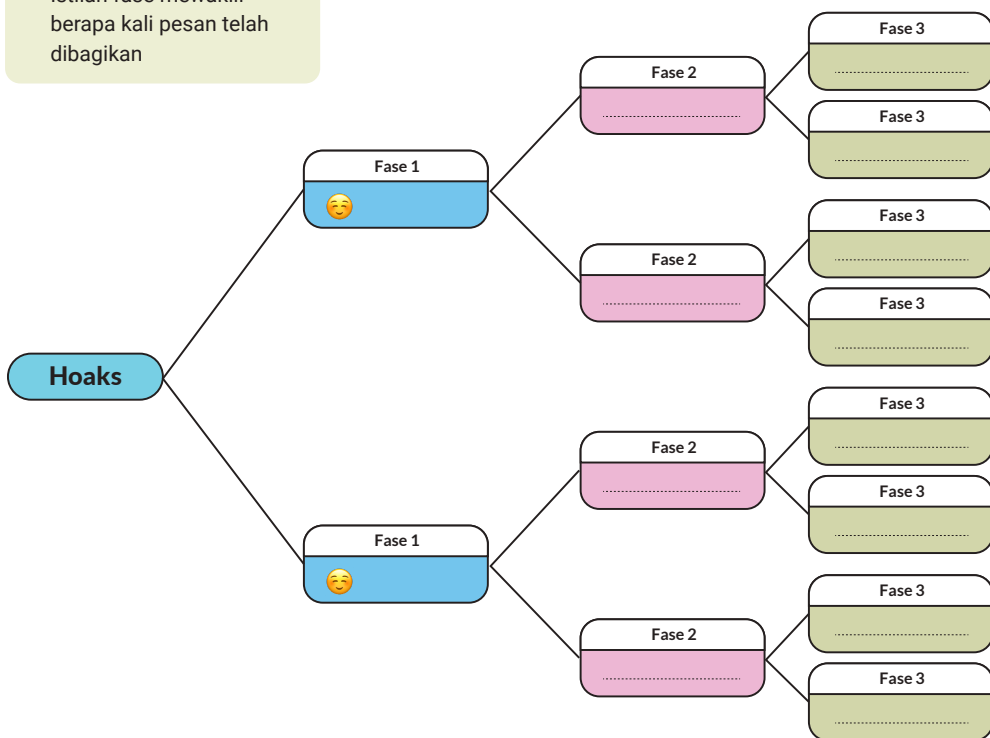
Kamu akan mencoba menganalisis data penyebaran hoaks secara mandiri. Percobaan ini akan membantumu memahami konsep eksponen. Pastikan kamu punya waktu yang cukup untuk melakukan percobaan mandiri ini.



Petunjuk

- Gunakan emoji senyum untuk mewakili 1 orang.
- Istilah fase mewakili berapa kali pesan telah dibagikan

Gambarkan diagram pohon yang menunjukkan penyebaran hoaks hingga pesan sudah dibagikan 3 kali.



Lengkapilah tabel di bawah ini yang akan memberimu gambaran penyebaran di setiap fase hingga fase ke-8.

Fase penyebaran	1	2	3	4	5	6	7	8
Banyak orang yang menerima hoaks	2	4	...					

1. Perhatikan jumlah orang pada setiap fasenya. Pola bilangan apa yang kamu temukan?
2. Dengan memanfaatkan pola bilangan tersebut, hitung jumlah orang yang menerima hoaks tersebut pada fase ke-6? Bagaimana kamu mengetahuinya?
3. Pada fase ke berapakah jumlah orang yang menerima hoaks akan melebihi 200 orang? Bagaimana kamu mengetahuinya?
4. Jika banyak fase adalah n , tuliskan rumus sederhana untuk menghitung banyak orang yang menerima hoaks pada fase ke- n tersebut?



Petunjuk

kamu boleh menuliskan rumus dalam bentuk kalimat tertulis maupun dalam bentuk kalimat matematika.



Ayo, Bekerja Sama

Bagikan rumus yang kamu buat pada nomor 4 kepada satu temanmu. Bandingkan rumusmu dan gunakan rumus tersebut untuk menghitung jumlah orang pada fase ke-7. Apakah rumusmu menghasilkan jawaban yang benar? Apabila tidak, perbaiki rumusmu agar dapat menghasilkan jawaban yang benar.

Perhatikan kembali **Eksplorasi 1.1** yang sudah kamu lakukan. Ada hubungan yang menarik antara fase penyebaran dengan jumlah orang yang menerima hoaks. Simak polanya sebagai berikut.

$$1 = 2^0$$

$$2 = 2 = 2^1$$

$$4 = 2 \times 2 = 2^2$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

Jika banyak orang yang mendapatkan hoaks di fase ke- n dinyatakan dengan m , maka

$$m = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \cdots \times 2 = 2^n$$

Dengan memanfaatkan kesimpulan di atas, maka jumlah orang yang mendapatkan hoaks pada fase ke-5 dapat dengan mudah dihitung sebagai berikut.

$$2^5 = 32 \text{ orang.}$$

Bentuk 2^1 , 2^2 , 2^3 , 2^4 dan 2^n ini merupakan bentuk bilangan pangkat. Bilangan berpangkat akan memudahkan kamu untuk menyederhanakan

bentuk perkalian berulang. Bilangan berpangkat atau disebut juga eksponen didefinisikan sebagai berikut.

Jika a adalah bilangan real dan n adalah bilangan bulat positif, maka a^n menyatakan hasil kali bilangan a sebanyak n faktor dan ditulis dengan

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ faktor}}$$

Bilangan berpangkat dapat dinyatakan dengan

$$a^n$$

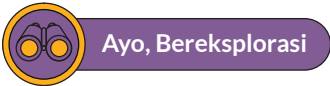
↗ pangkat
↘ bilangan pokok

Berikut adalah beberapa definisi penting yang perlu kamu ketahui.

1. Jika a adalah bilangan real dengan $a \neq 0$ dan n bilangan bulat positif, maka $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$
2. Jika a adalah bilangan real dengan $a \neq 0$ dan n bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{1}{n}} = p$ adalah bilangan real positif, sehingga $p^n = a$
3. Jika a adalah bilangan real dengan $a \neq 0$ dan m, n bilangan bulat positif, maka $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

B. Sifat-Sifat Eksponen

Eksplorasi 2.2 Sifat-Sifat Eksponen



Perhatikan tabel yang menunjukkan bentuk eksponen 2^n di bawah ini.

Tabel 1.1 Bentuk Eksponen 2^n

2^n	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	----------

Hasil Perpangkatan	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1.024
-----------------------	---	---	---	----	----	----	-----	-----	-----	-------

Sekarang kamu amati bentuk eksponen di bawah ini. Selesaikan dan diskusikan dengan teman kelompokmu.

1) $2^2 \cdot 2^3$	4) $\frac{2^8}{2^6}$	7) $(2^3)^3$
2) $2^5 \cdot 2^2$	5) $\frac{2^{10}}{2^3}$	8) $(2^4)^2$
3) $2^3 \cdot 2^7$	6) $\frac{2^6}{2^4}$	9) $(2^2)^5$

Dari pengamatan di atas, apa yang dapat kamu simpulkan dari sifat-sifat eksponen tersebut?

1. Secara umum apakah bentuk lain dari $a^m \cdot a^n$?
2. Secara umum apakah bentuk lain dari $\frac{a^m}{a^n}$?
3. Secara umum apakah bentuk lain dari $(a^m)^n$?

Itu merupakan beberapa sifat-sifat yang berlaku pada eksponen. Berikut sifat-sifat eksponen yang perlu kamu ketahui. Kamu sudah membuktikan sifat 1, 2, dan 3.

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, dengan $a \neq 0$, m, n bilangan bulat
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, dengan $a \neq 0$, m, n bilangan bulat
3. $(a^m)^n = a^{m \times n}$, dengan $a \neq 0$, m, n bilangan bulat
4. $(ab)^m = a^m \times b^m$ dengan $a, b \neq 0$, dan m bilangan bulat
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ dengan $b \neq 0$, dan m bilangan bulat
6. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{n}}\right) = \left(a\right)^{\frac{m+p}{n}}$ dengan $a > 0$, $\frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{n}$ bilangan rasional dengan $n \neq 0$
7. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)\left(a^{\frac{p}{q}}\right) = \left(a\right)^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$ dengan $a > 0$, $\frac{m}{n}$ dan $\frac{p}{n}$ bilangan rasional dengan $n, q \neq 0$



Ayo, Berpikir Kreatif

Bagaimana kamu membuktikan Sifat 4 dan 5? Diskusikan bersama temanmu.

Perhatikan contoh 1 dan 2 berikut.

Contoh 1

Sederhanakanlah bentuk eksponen $\frac{2^5 \times 2^3}{2^2}$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \frac{2^5 \times 2^3}{2^2} &= \frac{2^{5+3}}{2^2} \\
 &= \frac{2^8}{2^2} \\
 &= 2^{8-2} \\
 &= 2^6
 \end{aligned}$$

Contoh 2

Sederhanakan bentuk eksponen $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 \times \left(x^{\frac{4}{3}}\right)$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2 \times \left(x^{\frac{4}{3}}\right) &= \left(x^{\frac{2}{3}}\right) \times \left(x^{\frac{4}{3}}\right) \\
 &= x^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}} \\
 &= x^{\frac{6}{3}} \\
 &= x^2
 \end{aligned}$$

Latihan 2.1

- Buktikan sifat eksponen nomor 6 dan 7.
- Tentukan nilai p sedemikian sehingga persamaan berikut ini tepat
 - $(3^4)^2 = 3^p$
 - $b^p \cdot b^5 = 3^9$
 - $(3\pi)^p = 27\pi^3$

3. Sederhanakanlah

- a. $\left(\frac{2^4 \times 3^6}{2^3 \times 3^2}\right)^3$
- b. $(3u^3v^5)(9u^4v)$
- c. $\left(\frac{n^{-1}r^4}{5n^{-6}r^4}\right)^2, n \neq 0, r \neq 0$

C. Fungsi Eksponensial

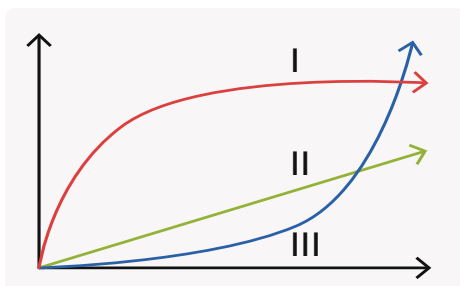
Eksplorasi 2.3 Fungsi Eksponensial



Ayo, Bereksplorasi

Seseorang terjangkit virus dan menulari 3 orang lainnya. Pada fase selanjutnya, setiap orang menulari 3 orang lainnya lagi.

1. Berapakah orang yang akan tertular pada setiap fase selanjutnya?
2. Berapa orang yang akan tertular virus tersebut pada fase ke-20?
3. Manakah dari grafik fungsi berikut ini yang merepresentasikan peningkatan jumlah orang yang tertular virus tersebut jika proses penularan terjadi terus-menerus? Mengapa demikian?



4. Fungsi apakah yang tepat menggambarkan penularan tersebut?

Perhatikan Eksplorasi 1.3

Pada fase pertama 3 orang tertular dari orang pertama dan kemudian menularkan masing-masing ke 3 orang lainnya. Kemudian 3 orang tersebut menularkan lagi ke masing-masing 3 orang berikutnya, begitu seterusnya.

Jika disajikan dalam bentuk tabel maka diperoleh seperti berikut ini.

Tabel 1.2 Penularan Virus di Beberapa Fase

Fase	1	2	3	4	5	6	7
Banyak orang yang tertular	$3 = 3^1$	$9 = 3^2$	$27 = 3^3$	$81 = 3^4$	$243 = 3^5$	$729 = 3^6$	$2187 = 3^7$

Kalau kamu perhatikan, untuk menentukan banyaknya orang yang tertular virus tersebut, pola yang muncul adalah 3^x , dengan x adalah fase penyebaran virus. Jika $f(x)$ adalah banyaknya orang yang tertular virus tersebut, sementara x adalah fase penyebaran virus, maka banyaknya orang yang tertular virus tersebut dapat dinyatakan dengan,

$$f(x) = 3^x$$

$f(x) = 3^x$ adalah salah satu contoh fungsi eksponensial.

Definisi Fungsi Eksponensial

Sebuah fungsi eksponensial dinyatakan dengan

$$f(x) = n \times a^x$$

dengan a adalah bilangan pokok, $a > 0$, $a \neq 1$, n adalah bilangan real tak nol dan x adalah sebarang bilangan real.



Ayo, Berpikir Kreatif

Apakah kamu sudah memahami definisi di atas? Coba diskusikan pertanyaan berikut ini.

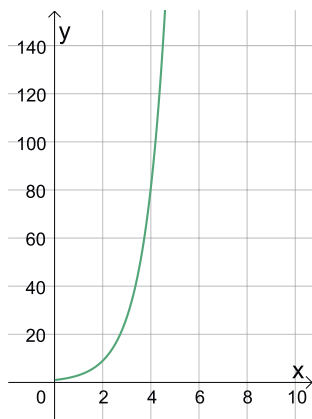
1. Bagaimana jika $a = 1$?
2. Bagaimana jika $a = 0$?

Beberapa contoh fungsi eksponensial lainnya adalah sebagai berikut.

1. $f(x) = 4^x$
2. $f(x) = 3^{x+1}$
3. $f(x) = 5^{2x-1}$

Jika kamu perhatikan, perubahan nilai pada fungsi eksponensial sangatlah signifikan. Pada **Eksplorasi 1.3** dapat kamu amati bahwa pada fase-fase selanjutnya, semakin banyak orang yang tertular virus tersebut.

Grafik fungsi eksponensial pada $f(x) = 3^x$ ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Gambar 1.3 Grafik Fungsi $f(x) = 3^x$

Fungsi eksponensial dibedakan menjadi dua bentuk, yaitu pertumbuhan eksponensial dan peluruhan eksponensial.



Ayo, Berpikir Kreatif

Perhatikan ketiga fungsi berikut ini.

a. $f(x) = 2x$ b. $f(x) = 2^x$ c. $f(x) = x^2$

1. Gambarlah ketiga grafik fungsi tersebut.
2. Apa yang membedakan ketiga grafik fungsi tersebut?
3. Dari ketiga grafik fungsi tersebut, grafik yang manakah yang paling cepat peningkatannya?

1. Pertumbuhan Eksponen

Kurva pada **Gambar 1.3** adalah salah satu kurva yang menunjukkan pertumbuhan eksponen, yang tingkat pertumbuhannya berbanding lurus dengan besarnya nilai kuantitasnya. Contoh yang lainnya misalnya pada

pertumbuhan bakteri di mana pada fase-fase selanjutnya bakteri tentu akan semakin banyak jumlahnya.

Fungsi pertumbuhan eksponen dituliskan dengan

$$f(x) = a^x \text{ dengan } a > 1$$



Ayo, Bereksplorasi

Ada sebuah dongeng rakyat dari India yang menunjukkan bagaimana ide pertumbuhan eksponen dimanfaatkan seorang anak untuk menolong penduduk di kotanya yang kelaparan. Judul dongeng ini adalah *One Grain of Rice* dan ditulis oleh Demi.

Dengarkan dongeng ini dengan mencarinya di kanal Youtube menggunakan kata kunci “*One Grain of Rice*”. Kerjakan aktivitas yang mengikuti. Kamu dapat menyetel fungsi terjemah otomatis dari Youtube jika dirasa perlu.

Permintaan anak perempuan ini merupakan contoh pertumbuhan eksponen. Dengan teman sekelompokmu, cari tahu berapa biji beras yang diterima anak perempuan di dalam cerita ini setiap harinya selama 30 hari.

Hari ke-1	Hari ke-2	Hari ke-3	Hari ke-4	Hari ke-5
Hari ke-6	Hari ke-7	Hari ke-8	Hari ke-9	Hari ke-10
Hari ke-11	Hari ke-12	Hari ke-13	Hari ke-14	Hari ke-15
Hari ke-16	Hari ke-17	Hari ke-18	Hari ke-19	Hari ke-20
Hari ke-21	Hari ke-22	Hari ke-23	Hari ke-24	Hari ke-25

Hari ke-26	Hari ke-27	Hari ke-28	Hari ke-29	Hari ke-30

Sekarang mari kita lihat beberapa contoh berikut ini.

Contoh 3

Untuk mengamati pertumbuhan suatu bakteri pada inangnya, seorang peneliti mengambil potongan inang yang sudah terinfeksi bakteri tersebut dan mengamatnya selama 5 jam pertama. Pada inang tersebut, terdapat 30 bakteri. Setelah diamati, bakteri tersebut membelah menjadi dua setiap 30 menit.

1. Modelkan fungsi pertumbuhan bakteri pada setiap fase.
2. Gambarkan grafik pertumbuhan bakteri tersebut.
3. Pada jam ke-5 berapa banyak bakteri baru yang tumbuh?

Alternatif Penyelesaian:

1. Pada awal pengamatan, bakteri yang diamati berjumlah 30 sehingga untuk 30 menit berikutnya dapat digambarkan pertumbuhan bakterinya sebagai berikut. Misalkan x adalah fase pertumbuhan bakteri setiap 30 menit, maka

Fase (30 menit)	0	1	2	3	4	5
Banyak bakteri	30	60	120	240	480	960

Untuk $x = 0$, banyak bakteri = 30 ;

Untuk $x = 1$, banyak bakteri = $60 = 2^1 \cdot 30$;

Untuk $x = 2$, banyak bakteri = $120 = 2^2 \cdot 30$;

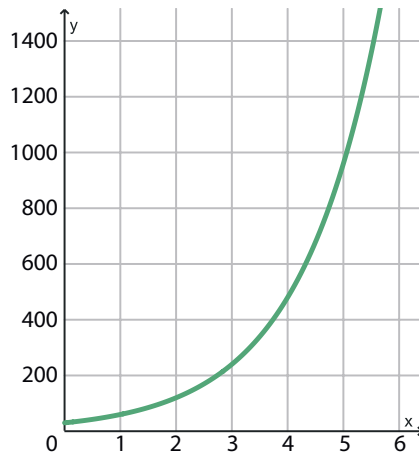
Untuk $x = 3$, banyak bakteri = $240 = 2^3 \cdot 30$;

Untuk $x = 4$, banyak bakteri = $480 = 2^4 \cdot 30$;

Pertumbuhan bakteri dapat dimodelkan dengan fungsi eksponensial

$$f(x) = 30 \cdot (2^x)$$

2. Grafik fungsi eksponensial pertumbuhan bakteri $f(x) = 30 \cdot (2^x)$ dapat digambarkan sebagai berikut.



Petunjuk

Gunakan aplikasi GeoGebra untuk membantumu menggambarkan grafik tersebut. Kunjungi www.geogebra.org

Gambar 1.4 Grafik Fungsi $f(x) = 30.(2^x)$

3. Jam ke-5 terjadi pada fase ke-10 (ingat kembali pembelahan terjadi setiap 30 menit), sehingga:

$$\begin{aligned} f(10) &= 30.(2^{10}) \\ &= 30.(1024) \\ &= 30.720 \end{aligned}$$

Jadi banyak bakteri yang tumbuh pada jam ke-5 atau fase ke-10 adalah 30.720 bakteri.



Ayo, Berpikir Kritis

Jika banyak bakteri di awal adalah 50, 100 dan 200, bagaimana kamu memodelkan pertumbuhan bakteri tersebut?



Ayo, Berdiskusi

Diskusikan dengan teman kelompok kalian.

Contoh 4

Seorang peneliti mengamati pertumbuhan bakteri selama beberapa jam. Setelah diamati, bakteri tersebut membelah menjadi n bakteri setiap jam. Setelah diamati, jumlah bakteri pada 2 jam pertama adalah 8.000

bakteri. Dua jam kemudian jumlah bakteri sudah mencapai 32.000 bakteri. Berapakah jumlah bakteri setelah 10 jam?

Alternatif Penyelesaian:

Misalkan x_0 adalah banyaknya bakteri pada waktu $t = 0$.

Jika a adalah banyaknya bakteri setelah pembelahan setiap jam, maka

Untuk $t = 0$, banyak bakteri $= x_0$;

Untuk $t = 1$, banyak bakteri $= a^1 \cdot x_0$;

Untuk $t = 2$, banyak bakteri $= a^2 \cdot x_0$;

Untuk $t = 3$, banyak bakteri $= a^3 \cdot x_0$;

Untuk $t = 4$, banyak bakteri $= a^4 \cdot x_0$;

dan seterusnya.

Kamu harus mencari nilai a terlebih dahulu untuk mengetahui banyak bakteri yang dihasilkan ketika sebuah bakteri membelah dalam 1 jam. Jika banyak bakteri pada 2 jam pertama adalah x_2 dan banyak bakteri pada 2 jam berikutnya (4 jam kemudian) adalah x_4 , maka:

$$\begin{aligned}\frac{x_4}{x_2} &= \frac{32.000}{8.000} \\ \frac{a^4 \cdot x_0}{a^2 \cdot x_0} &= \frac{32.000}{8.000} \\ a^2 &= 4 \\ a &= \sqrt{4} \\ a &= 2\end{aligned}$$

Jadi, setiap 1 jam bakteri akan membelah menjadi dua bakteri.

Selanjutnya kamu akan mencari banyak bakteri di awal yaitu x_0 . Kamu dapat menggunakan persamaan $x_2 = a^2 \cdot x_0$ dengan substitusikan nilai $a = 2$ pada $x_2 = a^2 \cdot x_0$

$$\begin{aligned}x_2 &= a^2 \cdot x_0 \\ 8.000 &= 2^2 \cdot x_0 \\ 8.000 &= 4 \cdot x_0 \\ \frac{8.000}{4} &= x_0 \\ x_0 &= 2.000\end{aligned}$$

Jadi, banyaknya bakteri mula-mula adalah 2.000 bakteri.

Untuk mencari banyak bakteri pada 10 jam kemudian, maka digunakan persamaan $x_{10} = a^{10} \cdot x_0$. Substitusikan nilai $a = 2$ dan $x_0 = 2.000$ pada $x_{10} = a^{10} \cdot x_0$,

$$x_{10} = 2^{10} \cdot x_0$$

$$x_{10} = 2^{10} \cdot 2.000$$

$$x_{10} = 1.024 \cdot 2.000$$

$$x_{10} = 2.048.000$$

Jadi, banyaknya bakteri setelah 10 jam adalah 2.048.000 bakteri.

Latihan 2.2

Jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Bakteri *E.coli* menyebabkan penyakit diare pada manusia. Seorang peneliti mengamati pertumbuhan 50 bakteri ini pada sepotong makanan dan menemukan bahwa bakteri ini membelah menjadi 2 setiap seperempat jam.
 - a. Gambarkan tabel dan grafik yang menunjukkan pertumbuhan bakteri ini dari fase 0 sampai fase 5.
 - b. Modelkan fungsi yang menggambarkan pertumbuhan bakteri *E.coli* setiap seperempat jam.
 - c. Prediksi berapa banyaknya bakteri setelah 3 dan 4 jam pertama.
2. Pada tahun 2015 kasus positif HIV-AIDS berjumlah sekitar 36 juta jiwa. Jumlah ini meningkat rata-rata 2% setiap tahun dari tahun 2010 hingga 2015. Jika peningkatan kasus positif HIV di tahun-tahun berikutnya diprediksi bertambah secara eksponen pada peningkatan 2% setiap tahun, berapa banyak kasus yang terjadi pada tahun 2020?

Sumber: <https://pusdatin.kemkes.go.id/> (dengan berbagai penyesuaian)



Petunjuk

Gunakan aplikasi GeoGebra untuk membantumu menggambarkan grafik tersebut. Kunjungi www.geogebra.org

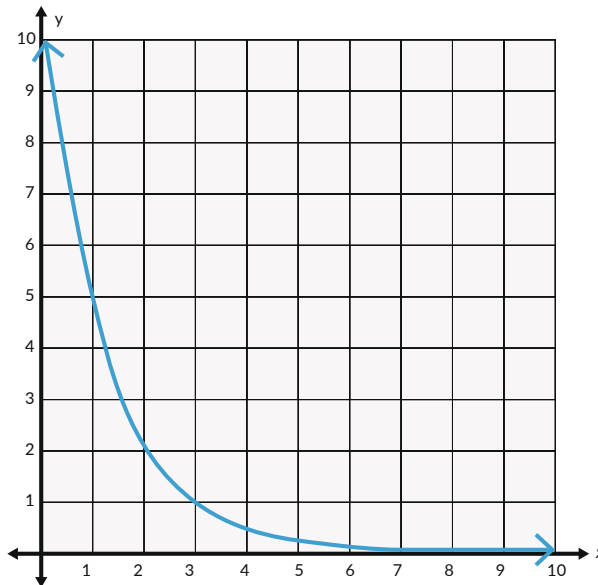


Ayo, Berdiskusi

Berikan sebuah contoh penerapan pertumbuhan eksponen lainnya.

2. Peluruhan Eksponen

Fungsi eksponensial tidak hanya menggambarkan pertumbuhan yang signifikan dari waktu ke waktu. Fungsi eksponensial juga menggambarkan penurunan secara konsisten pada periode waktu tertentu. Ini disebut peluruhan eksponen. Perhatikan grafik fungsi peluruhan eksponen pada **Gambar 1.5**. Apa perbedaannya dengan grafik pertumbuhan eksponen? Diskusikan dengan temanmu.



Gambar 1.5 Grafik Fungsi Peluruhan Eksponen

Fungsi peluruhan eksponen dapat dituliskan sebagai

$$f(x) = n \times a^x, \text{ dengan } 0 < a < 1, n \text{ bilangan real tak nol, } x \text{ adalah sebarang bilangan real.}$$

Contoh 5

Obat penahan rasa sakit disuntikkan kepada pasien yang mengalami luka berat akibat kecelakaan. Dosis obat yang disuntikkan adalah 50 mikrogram. Satu jam setelah penyuntikan, setengah dosis tersebut akan luruh dan dikeluarkan dari dalam tubuh. Proses tersebut akan terus berulang setiap jam.

1. Berapa banyak dosis obat yang masih tertinggal di dalam tubuh pasien setelah 1 jam, 2 jam, dan 3 jam?
2. Bagaimana model matematika yang dapat menyatakan peluruhan dosis obat tersebut?

Alternatif Penyelesaian:

1. Dosis awal = 50 mikrogram

Misalkan dosis pada x waktu dilambangkan dengan $f(x)$, maka

$$f(0) = 50$$

$$f(1) = \frac{1}{2} \times 50 = 25$$

$$f(2) = \frac{1}{2} \times 25 = 12,5$$

$$f(3) = \frac{1}{2} \times 12,5 = 6,25$$

Jadi, dosis pada 1 jam pertama tersisa 25 mikrogram, pada 2 jam pertama tersisa 12,5 mikrogram, dan setelah 3 jam tersisa 6,25 mikrogram.

2. Berdasarkan soal nomor 1, fungsi eksponensial yang dapat menyatakan peluruhan dosis obat tersebut dari dalam tubuh pasien pada jam tertentu adalah $f(x) = 50 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dengan x adalah waktu yang dibutuhkan obat tersebut untuk meluruh sebanyak setengah dosis dari dosis sebelumnya.



Ayo, Berdiskusi

Diskusikan mengapa fungsi $f(x) = 50 \left(\frac{1}{2}\right)^x$ dapat menggambarkan permasalahan di atas.



Ayo, Berpikir Kreatif

Prediksilah, berapa jam yang dibutuhkan sehingga dosis obat tersebut masih ada di dalam tubuh pasien kurang dari 0,1 mikrogram.

Latihan 2.3

Jawablah pertanyaan berikut ini.

1. Dua ratus mg zat disuntikkan ke dalam tubuh pasien yang menderita penyakit kanker paru-paru. Zat tersebut akan dikeluarkan dari dalam tubuh melalui ginjal setiap jam. Jika setiap 1 jam 50% zat tersebut dikeluarkan dari dalam tubuh pasien, berapa mg zat tersebut yang masih tersisa di dalam tubuh pasien setelah 5 jam?
2. Massa suatu zat radioaktif adalah 0,3 kg pada pukul 10 pagi. Tingkat peluruhan zat radioaktif tersebut adalah 15 % setiap jam. Berapakah jumlah zat radioaktif tersebut 8 jam kemudian?
3. Sebuah bola basket dijatuhkan dari ketinggian 3 meter. Bola tersebut menyentuh tanah dan kemudian melambung kembali setinggi $\frac{3}{5}$ dari tinggi sebelumnya. Bola tersebut terpantul dan melambung kembali dengan ketinggian yang sama sampai akhirnya benar-benar berhenti melambung dan jatuh ke tanah.
 - a. Gambarkan grafik fungsi perubahan ketinggian lambungan bola hingga akhirnya menyentuh tanah.
 - b. Pada lambungan ke berapa, bola akhirnya berhenti melambung?



Petunjuk

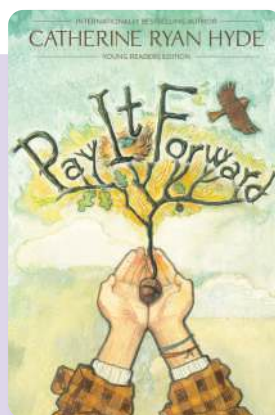
Ambil paling tidak lima lambungan pertama untuk membantumu.



Penguatan Karakter

Pada sebuah novel berjudul *Pay It Forward* yang ditulis oleh Catherine Ryan Hyde, seorang anak bernama Trevor ditugaskan gurunya untuk memikirkan ide yang dapat membuat dunia menjadi lebih baik. Ide yang dicetus Trevor adalah untuk melakukan kebaikan tanpa syarat kepada 3 orang dan meminta 3 orang tersebut membalas kebbaikannya bukan untuk dirinya tetapi untuk 3 orang lainnya. Ide ini dinamakan *Pay It Forward* yang dapat diterjemahkan menjadi Melanjutkan Kebaikan Kedepan.

Ide *Pay It Forward* ini dapat menghasilkan pertumbuhan eksponensial yang sangat tinggi. Bayangkan apabila ide tersebut diterapkan oleh banyak



orang di dunia. Bayangkan juga betapa lebih baiknya dunia kita apabila kita menerapkan ide ini. Menurutmu, jika diterapkan, dalam berapa lamakah aksi kebaikan ini bisa dirasakan 100 orang? Bagaimana dengan 1 juta orang?

Tuliskan 3 ide aksi kebaikan tanpa syarat yang dapat kamu lakukan hari ini. Aksi kebaikan tidak harus hal yang besar dan harus dipersiapkan lama. Aksi kebaikan dapat hal sekecil apapun. Apakah kamu mau mencoba ide *Pay It Forward* ini?

D. Bentuk Akar

1. Hubungan Bilangan Pangkat dan Akar

Perhatikan kembali **Contoh 5** sebelumnya. Fungsi eksponensial yang menyatakan peluruhan dosis obat di dalam tubuh pasien dituliskan dalam fungsi $f(x) = 50(0,5)^x$ dengan x adalah waktu yang dibutuhkan obat tersebut untuk meluruh sebanyak setengah dosis dari dosis sebelumnya. Jika kamu ingin mengetahui banyaknya dosis yang meluruh setelah 30 menit, bagaimana cara yang kamu lakukan?

Fungsi untuk permasalahan tersebut adalah $f(x) = 50(0,5)^x$

Setelah 30 menit, banyak dosis obat yang meluruh adalah $f\left(\frac{1}{2}\right) = 50(0,5)^{\frac{1}{2}}$

Akan mudah bagimu untuk menentukan hasil penghitungan dengan pangkat bilangan bulat positif. Sementara bentuk $(0,5)^{\frac{1}{2}}$ tentu menyulitkan untuk menentukan hasil perpangkatannya dengan penghitungan manual.

Bentuk lain dari $(0,5)^{\frac{1}{2}}$ adalah $\sqrt{0,5}$. Bentuk ini disebut bentuk akar. Bentuk akar didefinisikan sebagai berikut.

Untuk setiap bilangan pangkat rasional $\frac{m}{n}$, dengan m dan n adalah bilangan bulat dan $n > 0$, didefinisikan

$$a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m \text{ atau } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$



Ayo, Mengingat Kembali

Sifat-sifat eksponen juga dapat kamu gunakan untuk bentuk pangkat pecahan ini.

Contoh 6

Sederhanakanlah bentuk $(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x})$ untuk $x > 0$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}(2\sqrt{x})(3\sqrt[3]{x}) &= (2x^{\frac{1}{2}})(3x^{\frac{1}{3}}) \\ &= 2 \cdot 3 \cdot x^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \\ &= 6x^{\frac{3+2}{6}} \\ &= 6x^{\frac{5}{6}}\end{aligned}$$

**Ayo, Berpikir Kritis**

Apakah bentuk $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ benar? Jelaskan jawabanmu.

2. Merasionalkan Bentuk Akar

Untuk merasionalkan bentuk akar, maka yang dapat dilakukan adalah dengan mengalikannya dengan bentuk akar sekawannya.

Untuk merasionalkan bentuk $\frac{a}{\sqrt{b}}$ dilakukan dengan cara mengalikan dengan sekawannya yaitu $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}}$, sehingga diperoleh:

$$\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a}{b} \sqrt{b}$$

Untuk merasionalkan bentuk $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $\frac{c}{a+\sqrt{b}}$, dan $\frac{c}{a-\sqrt{b}}$ dilakukan dengan mengalikannya dengan sekawannya. Bentuk $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ dan $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ adalah sekawan, serta bentuk $a + \sqrt{b}$ dan $a - \sqrt{b}$ juga sekawan.

**Ayo, Berpikir Kreatif**

Coba rasionalkan bentuk-bentuk ini: $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$, $\frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, $\frac{c}{a+\sqrt{b}}$, dan $\frac{c}{a-\sqrt{b}}$

**Ayo, Berdiskusi**

Diskusikan cara yang kamu gunakan.

Latihan 2.4

1. Sederhanakan bentuk akar berikut ini.

a. $\left(\frac{8x^5y^{-4}}{16y^{-\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

b. $(5\sqrt{x^5})(3\sqrt[3]{x})$

c. $\left(\frac{p^5q^{-10}}{p^5q^{-4}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{p^{\frac{1}{4}}q^{-\frac{1}{2}}}{p^{-\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. Rasionalkan bentuk berikut ini.

a. $\frac{2}{\sqrt[4]{b^3}}$

b. $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$

c. $\frac{m}{\sqrt{m} + n}$

Latihan 2.5

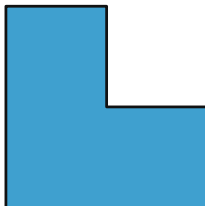
1. Selesaikanlah:

$$\left(\frac{3a^{-2}b}{a^2b^5c^{-1}}\right)^{-3}$$

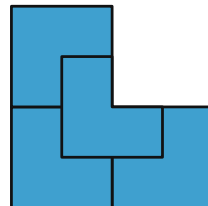
2. Selesaikanlah:

$$\sqrt[3]{\frac{24x^2y^5}{3x^5y^{11}}}$$

3. Sebuah bangun berbentuk seperti di bawah ini. Bangun tersebut kemudian dibagi menjadi 4 bangun yang kongruen.



Tahap 0



Tahap 1

- a. Buatlah tabel yang merepresentasikan banyaknya bangun yang kongruen di setiap tahap.

- b. Bagaimana model matematika yang tepat untuk menggambarkan permasalahan di atas?
 - c. Pada tahap ke-12, berapa banyak bangun kongruen yang dapat dibuat?
4. Sita menyusun sebuah fraktal seperti gambar di bawah ini.

Start



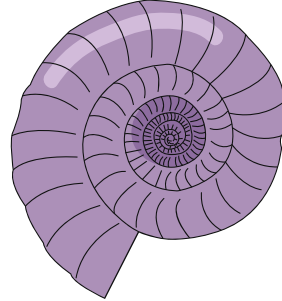
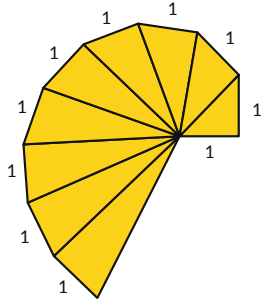
Sita membuat sebuah pola tertentu sehingga setiap tahap jumlah segmen garis yang dihasilkan semakin banyak walaupun dengan ukuran yang lebih kecil. Sita terus melanjutkan fraktal tersebut dengan menghasilkan lebih banyak segmen garis pada tahap-tahap selanjutnya dengan pola yang sama.

- a. Buatlah sebuah tabel yang menunjukkan peningkatan jumlah segmen garis pada fraktal yang dibuat oleh Sita.
 - b. Berapa banyak segmen garis yang dihasilkan setelah 20 tahap pertama?
5. Rini mengamati bahwa penjualan tas kulit yang diproduksinya mendapatkan hasil penjualan terbesar pada bulan pertama produk tersebut diperjualbelikan. Setelah Rini amati, penjualan tas miliknya pada bulan kedua sebesar $\frac{3}{4}$ dari penjualan tas pada bulan pertama. Demikian pula pada bulan ketiga, penjualan tas hanya $\frac{3}{4}$ dari bulan kedua. Hal tersebut ternyata berlangsung sampai beberapa bulan kemudian.
- a. Jika Rini menjual 500 buah tas kulit pada bulan pertama, berapa banyak tas yang terjual pada bulan kedua dan ketiga?
 - b. Berapa prediksi penjualan pada bulan ke-10?
 - c. Pada bulan ke berapakah prediksi penjualan akan kurang dari 10 tas saja?

6. Cangkang kerang merupakan salah satu contoh bentuk matematika yang ada di alam.

Perhatikan cangkang kerang berikut ini. Setiap ruang cangkang memiliki bentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi luarnya adalah 1 cm.

Bagaimana panjang hipotenusa pada ruang cangkang ke- n ?



7. Tanpa perlu menentukan hasil perpangkatannya, berapakah bilangan satuan dari 7^{123} ?



Petunjuk

Perhatikan pola bilangan satuan pada hasil setiap perpangkatannya.

8. Sebuah filter cahaya masih dapat ditembus oleh cahaya sebesar 60%. Berapa banyak filter cahaya yang dibutuhkan agar intensitas cahayanya menjadi kurang dari 5% dari intensitas cahaya di awal?

Uji Kompetensi

1. Selesaikanlah

a. $\left(\frac{x^{-5}y^4}{xy^3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{x^7y^{-3}}{x^{-4}y^6}\right)^{-\frac{1}{2}}, x \neq 0, y \neq 0$

b. $\frac{(m^{10}n^{-2})^3(m^5n^{-5})^3}{mn}, m \neq 0, n \neq 0$

c. $\frac{p+q}{\sqrt{p}-\sqrt{q}}, p \neq 0, q \neq 0$

2. Sebuah koloni bakteri terdiri atas 500 bakteri yang akan membelah diri menjadi dua setiap 1 jam.

- Tentukan fungsi yang menyatakan hubungan antara banyak bakteri setelah jam tertentu.
- Berapa lama waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut berjumlah 5.000 bakteri?
- Berapa lama waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut mencapai 100.000 bakteri?

Pengayaan

Permainan Pangkat

Dalam permainan ini, kamu menggunakan himpunan bilangan yang diberikan untuk membuat sebuah bilangan tujuan hanya boleh menggunakan operasi pangkat atau mencari hasil kali dua bilangan.

Setiap bilangan hanya boleh digunakan sekali saja. Kamu tidak harus menggunakan semua bilangan. Adakalanya lebih dari satu cara untuk membuat bilangan tujuan, sehingga cobalah untuk melihat berapa banyak cara yang dapat kamu temukan.

Contoh:

Himpunan bilangan: 2, 3, 4, 5, 16, 32 dan bilangan tujuan: 8

Cara 1: $2^3 = 8$

Cara 2: $32^{(\frac{1}{5})} \times 16^{(\frac{1}{2})}$

Cara 3: $\left(16^{\left(\frac{1}{4}\right)}\right)^3 = \left(16^3\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)}$

Apakah kamu dapat menemukan berbagai cara lain untuk membuat 8?
Apakah ada cara untuk menggunakan semua bilangan?

Permasalahan 1

Himpunan Bilangan: 2, 4, 5, 25, 27, 81

Bilangan Tujuan: 125

Permasalahan 2

Himpunan Bilangan: 2, 5, 16, 243, 343, 512

- Bilangan Tujuan: 49
- Bilangan Tujuan: 89
- Bilangan Tujuan: 1024
- Bilangan Tujuan: 216
- Bilangan Tujuan: 64

Berapa banyak cara yang dapat kamu temukan untuk setiap bilangan tujuan?

Apakah ada bilangan tujuan yang tidak dapat kamu buat? Seberapa dekatkah bilangan yang dapat kamu buat dengan bilangan tujuan tersebut?

Sumber: nrich.maths.org (2023)



Petunjuk

Untuk memulai, cobalah menuliskan bilangan yang lebih besar sebagai bentuk pangkat dari bilangan-bilangan yang lebih kecil, dan bilangan yang lebih kecil sebagai bentuk akar dari bilangan yang lebih besar.

Logaritma



Ayo, Bereksplorasi

Sebuah koloni bakteri terdiri atas 2.000 bakteri yang akan membelah diri menjadi dua setiap 1 jam. Pertumbuhan bakteri tersebut mengikuti bentuk fungsi eksponensial

$$f(x) = 2.000(2^x)$$

1. Berapa lama waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut berjumlah 64.000 bakteri?
2. Berapa lama waktu yang dibutuhkan sehingga koloni bakteri tersebut mencapai 100.000 bakteri?

Untuk menentukan waktu yang dibutuhkan koloni bakteri sampai berjumlah 64.000 bakteri tentu masih mudah.

Perhatikan tabel berikut ini.

Tabel 1.3 Pertumbuhan Koloni Bakteri

Waktu (x)	0	1	2	3	4	5	6
Banyak bakteri	2.000	4.000	8.000				

Selanjutnya bagaimana menentukan waktu yang dibutuhkan sehingga terdapat 100.000 bakteri?

Setelah memasukkan berbagai nilai x , ternyata waktu yang dibutuhkan bukan berupa bilangan bulat.

Waktu yang terdekat adalah

$$x = 5 \text{ dengan banyak bakteri adalah } f(5) = 2.000(2^5) = 64.000$$

$$x = 6 \text{ dengan banyak bakteri adalah } f(6) = 2.000(2^6) = 128.000$$

Dengan demikian, 100.000 bakteri akan muncul antara 5 sampai 6 jam. Dengan kata lain, kamu harus menemukan nilai x sehingga berlaku $100.000 = 2.000(2^x)$

Jika nilai $x = 5,5$ disubstitusi pada fungsi tersebut, maka diperoleh

$$f(5,5) = 2.000(2^{5,5})$$

$$f(5,5) = 2.000(45,25)$$

$$f(5,5) = 90.509$$

Dalam waktu 5,5 jam sudah terdapat sekitar 90.509 bakteri di koloni tersebut. Dengan demikian, waktu yang dibutuhkan hingga mencapai 100.000 bakteri lebih dari 5,5 jam.

Kegiatan mencoba-coba dapat terus kita lakukan sampai menemukan waktu yang paling tepat. Akan tetapi, tentu hal tersebut menjadi tidak efisien.

Untuk menentukan waktu hingga bakteri berjumlah 100.000, kamu memiliki

$$100.000 = 2.000(2^x)$$

$$50 = 2^x \qquad \text{kedua ruas dibagi dengan 2.000}$$

Dengan kata lain untuk mendapatkan nilai x kamu mencari nilai perpangkatan dua yang hasilnya adalah 50.

Untuk memudahkan perhitungan semacam itu, para matematikawan menemukan sebuah konsep yang membuat perhitungan tersebut menjadi lebih efisien yang disebut dengan *logaritma*. Selanjutnya $50 = 2^x$ ditulis dengan $x = {}^2\log 50$.

Dahulu para matematikawan pada awalnya menyusun logaritma yang akan memudahkan mereka untuk menentukan nilai suatu logaritma. Sekarang ini kamu dapat menggunakan kalkulator saintifik untuk menentukan nilai logaritma. Logaritma biasanya ditulis dengan *log*.

Definisi Logaritma

Misalkan a adalah bilangan positif dengan $0 < a < 1$ atau $a > 1, b > 0$,

$${}^a\log b = c \text{ jika dan hanya jika } b = a^c$$

dengan, a adalah bilangan pokok atau basis logaritma

b adalah numerus

c adalah hasil logaritma

Jadi, antara eksponen dan logaritma saling terkait. Logaritma adalah inversi atau kebalikan dari eksponen. Perhatikan tabel di bawah ini.

Tabel 1.4 Contoh Bentuk Eksponen dan Bentuk Logaritma

Bentuk Eksponen	Bentuk Logaritma
$2^5 = 32$	${}^2\log 32 = 5$
$3^2 = 9$	${}^3\log 9 = 2$
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	${}^5\log \frac{1}{25} = -2$
$7^0 = 1$	${}^7\log 1 = 0$

Bentuk logaritma yang juga perlu kamu ketahui adalah logaritma dengan basis 10 yang biasa disebut dengan Logaritma Umum. Bentuk logaritma umum ini biasanya juga dapat kamu tulis dengan menghilangkan basis logaritmanya. Bentuk logaritma umum didefinisikan sebagai berikut.

Definisi Logaritma Umum

Logaritma yang memiliki basis 10 disebut dengan logaritma umum dan dituliskan sebagai berikut:

$${}^{10}\log a = \log a$$

Sifat-Sifat Logaritma

Seperti halnya eksponen, logaritma juga memiliki sifat-sifat yang penting untuk kamu ketahui. Sifat-sifat logaritma yang perlu kamu ketahui adalah sebagai berikut.

Misalkan $a > 0$ dan $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $m > 0$, $m \neq 1$, dengan a, b, c, m, n adalah bilangan Real, maka berlaku:

1. ${}^a\log a = 1$
2. ${}^a\log 1 = 0$
3. ${}^a\log a^n = n$
4. ${}^a\log(b \times c) = {}^a\log b + {}^a\log c$
5. ${}^a\log\left(\frac{b}{c}\right) = {}^a\log b - {}^a\log c$
6. ${}^a\log b^n = n {}^a\log b$
7. ${}^a\log b = \frac{{}^m\log b}{{}^m\log a} = \frac{1}{{}^b\log a}$
8. ${}^a\log c = {}^a\log b \times {}^b\log c$

Contoh 7

Buktikan sifat logaritma ${}^a\log(b \times c) = {}^a\log b + {}^a\log c$

Alternatif Pembuktian:

Misalkan ${}^a\log b = m$ dan ${}^a\log c = n$.

kamu dapat menuliskan bentuk eksponennya sebagai berikut.

$$b = a^m \text{ dan } c = a^n$$

Ingat kembali sifat eksponen $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$b \cdot c = a^{m+n}$$

$${}_a\log(bc) = m + n \longrightarrow \text{definisi logaritma}$$

$$= {}^a\log b + {}^a\log c \text{ ingat kembali } {}^a\log b = m \text{ dan } {}^a\log c = n.$$



Ayo, Mencoba

Buktikan ${}_a\log(b \times c) = {}^a\log b + {}^a\log c$ dengan cara yang lain.



Ayo, Berdiskusi

Bagaimana membuktikan sifat-sifat logaritma yang lainnya? Diskusikan dengan temanmu.

Contoh 8

Sederhanakanlah bentuk logaritma berikut ini: ${}^2\log 16 + {}^2\log 8$

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned} {}^2\log 16 + {}^2\log 8 &= {}^2\log(16 \times 8) \\ &= {}^2\log 128 \\ &= {}^2\log 2^7 \\ &= 7 \cdot {}^2\log 2 \\ &= 7 \cdot 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Contoh 9

Arif menabung uangnya di bank sebesar Rp3.000.000,00 dan mendapatkan bunga sebesar 5% per tahun. Berapa lama Arif harus menyimpan uang di bank agar tabungannya tersebut menjadi tiga kali lipat dari tabungan awal?

Alternatif Penyelesaian:

Dimisalkan

M_0 = modal awal

M_t = modal setelah menabung selama t tahun.

i = bunga per tahun

Tabungan awal (M_0) Arif adalah Rp3.000.000,00

Tabungan setelah t tahun (M_t) = Rp9.000.000,00

Dengan mengeksplorasi tabungan awal dan bunga yang diperoleh Arif, kamu dapat menentukan rumus tabungan Arif setelah t tahun. Untuk menentukan total tabungan Arif setelah t tahun, diperoleh rumus penambahan uangnya sebagai $M_t = 3.000.000(1 + 0,05)^t$

Jika Arif menginginkan tabungan akhirnya menjadi 3 kali lipat, maka berlaku: $9.000.000 = 3.000.000(1 + 0,05)^t$



Ayo, Berpikir Kreatif

Bagaimana menentukan $M_t = 3.000.000(1 + 0,05)^t$?

Dengan menggunakan sifat-sifat logaritma, kamu dapat menentukan waktu yang dibutuhkan agar tabungan Arif menjadi 3 kali lipat.

$$9.000.000 = 3.000.000(1 + 0,05)^t$$

$$\frac{9.000.000}{3.000.000} = (1 + 0,05)^t$$

$$3 = (1 + 0,05)^t$$

$$\log 3 = \log(1 + 0,05)^t$$

$$\log 3 = \log 1,05^t$$

$$\log 3 = t \cdot \log 1,05$$

$$t = \frac{\log 3}{\log 1,05}$$

$$t = \frac{0,4771}{0,0212}$$

$$t = 22,5$$

Tips Penyelesain

$${}^a \log b^n = n \cdot {}^a \log b$$

Tips Penyelesain

Gunakan kalkulator atau tabel log

Jadi, Arif membutuhkan waktu 22,5 tahun agar tabungannya menjadi 3 kali lipat.

Latihan 2.6

1. Sederhanakan bentuk akar berikut ini.
 - a. ${}^9\log 81$
 - b. ${}^2\log 64 - {}^2\log 16$
 - c. ${}^4\log 16^{10}$
2. Jika ${}^5\log 4 = m$, ${}^4\log 3 = n$, nyatakan ${}^{12}\log 100$ dalam m dan n .
3. Penduduk kota A pada tahun 2010 sebanyak 300.000 jiwa. Pertumbuhan penduduk kota A rata-rata per tahun adalah 6%. Jika diasumsikan pertumbuhan penduduk setiap tahun sama, dalam berapa tahun penduduk kota A menjadi 1 juta jiwa?
4. Berapa waktu yang dibutuhkan sehingga uang Dini yang tadinya Rp2.000.000,00 dapat menjadi Rp6.500.000,00 jika dia menabung di suatu bank yang memberinya bunga sebesar 12%?

Refleksi

Dalam bab ini kamu sudah belajar tentang bilangan eksponen dan fungsi eksponensial. Ayo refleksikan pembelajaranmu dengan menjawab pertanyaan berikut.

1. Apa itu bilangan eksponen?
2. Seperti apa bentuk fungsi eksponensial?
3. Apa yang membedakan fungsi pertumbuhan eksponen dan peluruhan eksponen?

Asesmen Diri

Pertanyaan Asesmen Diri	Bisa Mandiri	Bisa dengan Bantuan	Belum Bisa
1. Apakah saya sudah bisa mengidentifikasi bilangan eksponen?			
2. Apakah saya sudah bisa menjelaskan bentuk fungsi eksponensial?			

Pertanyaan Asesmen Diri	Bisa Mandiri	Bisa dengan Bantuan	Belum Bisa
3. Apakah saya sudah bisa membedakan fungsi pertumbuhan dan peluruhan eksponen?			
4. Apakah saya sudah bisa menjelaskan manfaat konsep eksponen dalam kehidupan sehari-hari?			

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-558-7

Bab

2

Barisan dan Deret



Apa perbedaan barisan dan deret aritmetika dengan barisan dan deret geometri?

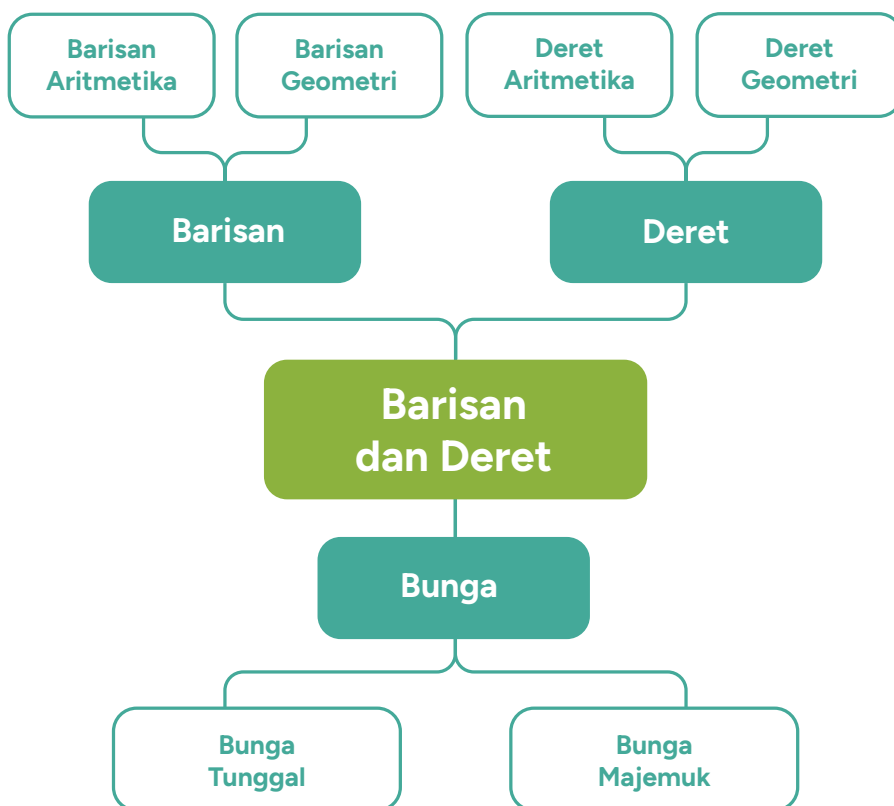
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kamu dapat menyelesaikan permasalahan kehidupan sehari-hari yang berkaitan dengan konsep barisan aritmetika dan barisan geometri serta konsep deret aritmetika dan deret geometri. Selain itu, kamu juga diharapkan mampu menggunakan konsep barisan dan deret untuk menyelesaikan permasalahan yang berkaitan dengan bunga tunggal dan bunga majemuk.

Kata Kunci

- barisan aritmetika
- barisan geometri
- deret aritmetika
- deret geometri
- bunga

Peta Materi



Barisan dan deret sangat erat kaitannya dengan konsep pola bilangan yang telah kamu pelajari pada jenjang SMP. Penerapan barisan dan deret sangat mudah ditemui dalam kehidupan sehari-hari.

Konsep barisan dan deret terkait dengan menghitung susunan kursi dengan banyaknya kursi yang berbeda di tiap barisnya. Kamu dapat menentukan banyak objek yang disusun dengan pola piramida di mana objek tersebut dapat bertambah atau berkurang secara konstan. Kamu dapat mempelajari pembelahan bakteri. Kamu juga dapat menentukan panjang lintasan dari bola yang dipantulkan. Bunga uang juga menggunakan konsep barisan dan deret.



Ayo, Mengingat Kembali

Jika kamu dihadapkan pada rangkaian susunan bilangan berikut, dapatkan kamu menebak bilangan berikutnya?

2	4	6	8	...	...
---	---	---	---	-----	-----

Dapatkan kamu menebak dua bilangan berikut pada susunan berikut?

1	2	4	8	...	...
---	---	---	---	-----	-----

Untuk lebih jelasnya, mari belajar tentang Barisan dan Deret!

A. Barisan

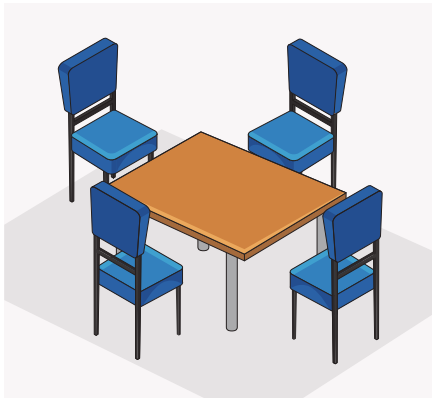
1. Barisan Aritmetika

Eksplorasi 2.1 Banyaknya Kursi

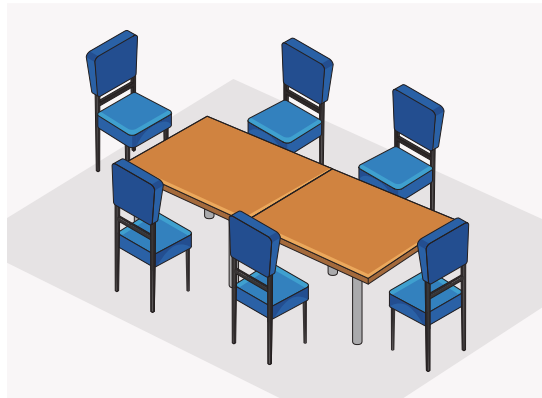


Ayo, Bereksplorasi

Ayo, bandingkan banyak meja dan kursi pada **Gambar 2.1** dan **Gambar 2.2**. Pada **Gambar 2.1**, terdapat satu meja berbentuk segi empat yang dilengkapi empat kursi. Jika dua meja disatukan, maka dapat dilengkapi dengan 6 kursi (**Gambar 2.2**)



Gambar 2.1 Meja Segi Empat dengan Empat Kursi



Gambar 2.2 Dua Meja Segi Empat Disatukan



Ayo, Berdiskusi

Jawablah pertanyaan berikut dengan berdiskusi bersama teman kelompokmu.

1. Berapa orang yang dapat duduk di kursi dengan sejumlah meja yang disatukan? Ayo, berkolaborasi dengan temanmu dalam mengisi **Tabel 2.1** untuk menjawab pertanyaan tersebut.

Tabel 2.1 Banyak Meja dan Kursi

Banyak meja	1	2	3	4	5	6
Banyak kursi	4	6	...	...	...	...

2. Jika terdapat 20 orang yang akan makan bersama di satu meja, maka berapa meja yang perlu disatukan? Bagaimana kamu mengetahuinya? Jelaskan jawabanmu.

Tabel 2.1 menampilkan pola bilangan: 4, 6, 8, 10, ...

Jika diamati lebih teliti, pola bilangan di atas disusun berdasarkan aturan tertentu. Pola bilangan yang demikian disebut dengan barisan bilangan.

Berapa suku barisan bilangan tersebut?

- Suku ke-1 dilambangkan dengan $U_1 = \dots$
- Suku ke-2 dilambangkan dengan $U_2 = \dots$
- Suku ke-3 dilambangkan dengan $U_3 = \dots$
- Suku ke-4 dilambangkan dengan $U_4 = \dots$

- Suku ke- n dilambangkan dengan U_n
Sehingga, barisan bilangan dapat dinyatakan dalam **bentuk umum**, yaitu $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$.
- Selanjutnya, aturan apa yang ada pada barisan bilangan pada **Tabel 2.1**?
- Operasi penghitungan apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?



- Berapakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan?

$$U_2 - U_1 = \dots - \dots = \dots$$

$$U_3 - U_2 = \dots - \dots = \dots$$

$$U_4 - U_3 = \dots - \dots = \dots$$
- Apakah beda atau selisih antara dua suku yang berdekatan selalu sama?

Suatu barisan dengan beda atau selisih antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut BARISAN ARITMETIKA. Beda pada barisan aritmetika dilambangkan dengan b .

Seperti yang telah diuraikan di atas, untuk mencari beda dapat dilakukan dengan cara mengurangkan dua suku yang berurutan sehingga dapat dituliskan sebagai berikut.

$$b = U_2 - U_1$$

$$b = U_3 - U_2$$

$$b = U_4 - U_3 \text{ dan seterusnya.}$$

Jadi, beda pada barisan aritmetika dapat dinyatakan dengan

$$b = U_n - U_{(n-1)}$$



Ayo, Bereksplorasi

Ayo, cermati banyak kursi di tiap baris pada gedung pertunjukan seni yang tampak pada **Gambar 2.3**:

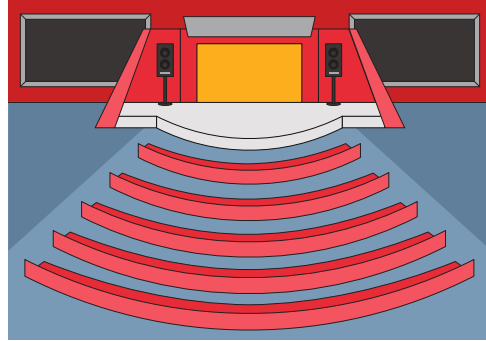
Baris ke-1 = 20

Baris ke-2 = 24

Baris ke-3 = 28

Baris ke-4 = 32

Baris ke-5 = 36



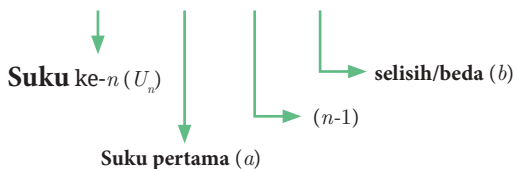
Gambar 2.3 Gedung Pertunjukan Seni

Berapakah jumlah kursi pada baris ke-15?

Untuk menentukan banyak kursi pada baris ke-15, sebelumnya kamu amati terlebih dahulu banyak kursi di tiap baris.

- Berapa beda atau selisih banyak kursi pada tiap baris?
- Baris ke-1 = 20
- Baris ke-2 = $24 = 20 + 4$ (20 ditambah 4 sebanyak 1 kali)
 $= 20 + (1 \times 4)$
- Baris ke-3 = $28 = 20 + \dots + \dots$ (20 ditambah 4 sebanyak ... kali)
 $= 20 + (\dots \times 4)$
- Baris ke-4 = $32 = 20 + \dots + \dots + \dots$ (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
 $= 20 + (\dots \times \dots)$
- Baris ke-5 = $36 = 20 + \dots + \dots + \dots + \dots$ (20 ditambah ... sebanyak ... kali)
 $= 20 + (\dots \times \dots)$
- Jadi, pada baris ke-15 = 20 ditambah ... sebanyak kali
 $= 20 + (\dots \times \dots) = \dots$

Baris ke-15 = $20 + (\dots \times \dots) = \dots$



Jadi, rumus umum menentukan suku ke- n pada barisan aritmetika adalah:

$$U_n = a + (n - 1) b$$

Keterangan:

U_n = suku ke- n a = suku pertama n = nomor suku b = beda

Contoh 1

Diketahui suatu barisan aritmetika, suku ke-3 = 9, suku ke-6 = 18. Tentukan rumus suku ke- n .

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} U_3 &= a + 2b = 9 \\ U_6 &= a + 5b = 18 \\ \hline &-3b = -9 \\ &b = \frac{-9}{-3} \\ &b = 3 \\ a + 2b &= 9 \\ a + 2(3) &= 9 \\ a + 6 &= 9 \\ a &= 9 - 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Rumus suku ke- n :

$$\begin{aligned} U_n &= a + (n - 1)b \\ U_n &= 3 + (n - 1)3 \\ &= 3 + 3n - 3 \\ U_n &= 3n \end{aligned}$$

Jadi, rumus suku ke- n dari barisan tersebut adalah $U_n = 3n$

Contoh 2

Rudi menabung di bank dengan selisih kenaikan nominal uang yang ditabung antarbulan tetap. Jika pada bulan ke-5, nominal uang yang ditabung Rp70.000,00 dan pada bulan ke-9 Rudi menabung sebesar Rp90.000,00.

- Berapa rupiah selisih nominal uang yang ditabung antarbulan?
- Tentukan berapa rupiah uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya?

Alternatif Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 U_5 &= 70.000 \\
 a + (5 - 1)b &= 70.000 \\
 a + 4b &= 70.000 \dots \text{(persamaan 1)} \\
 U_9 &= 90.000 \\
 a + (9 - 1)b &= 90.000 \\
 a + 8b &= 90.000 \dots \text{(persamaan 2)}
 \end{aligned}$$

Eliminasi Persamaan 1 dan 2

$$\begin{aligned}
 a + 8b &= 90.000 \\
 \underline{a + 4b &= 70.000 -} \\
 4b &= 20.000 \\
 b &= 5.000 \\
 b &\text{ adalah beda atau selisih.}
 \end{aligned}$$

Jadi, selisih nominal uang yang ditabung Rudi antarbulan adalah Rp5.000,00.

Selanjutnya, menentukan uang yang ditabung Rudi pertama kali, yaitu menentukan suku pertama yang dilambangkan dengan a dengan bantuan nilai b (beda) yang telah diketahui.

Gunakan **persamaan 1**, lalu substitusi nilai b (beda) yang telah diperoleh.

$$\begin{aligned}
 a + 4b &= 70.000 \\
 a + 4(5.000) &= 70.000 \\
 a + 20.000 &= 70.000 \\
 a &= 70.000 - 20.000 \\
 a &= 50.000 \\
 a &\text{ adalah suku pertama.}
 \end{aligned}$$

Jadi, uang yang ditabung Rudi untuk pertama kalinya adalah sebesar Rp50.000,00.

Penjelasan di atas menggunakan **Persamaan 1** untuk menentukan suku pertama. Bagaimana jika menggunakan **Persamaan 2**? Apakah hasilnya akan sama?

**Latihan 2.1**

1. Tuliskan dua suku berikutnya dari barisan bilangan di bawah ini.

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| a. 8, 5, 2, -1, ... | c. -15, -11, -7, ... |
| b. 2, 3, 5, 8, | d. ...10, 8, 4, -2, ... |

Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 1.

- Apakah barisan di atas barisan aritmetika?
- Jika iya, berapa beda dari barisan tersebut? Lalu, tentukan dua suku berikutnya dari barisan di atas.
- Jika tidak, maka aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut?

2. Tentukan suku ke-50 dari barisan berikut: 5, -2, -9, -16, ...

Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 2.

- Berapa beda pada barisan tersebut?
- $U_n = a + (n - 1)b$

Maka, suku ke - 50 = $U_{50} = \dots$

3. Jika diketahui barisan aritmetika dengan suku ke - 3 = $-4\frac{1}{2}$ dan suku ke - 8 = -2.

Tentukan suku pertama, beda, serta rumus suku ke- n dari barisan tersebut.

4. Setiap hari Jumat, Pak Hasan memberikan sepuluh bungkus nasi ke panti asuhan di dekat rumahnya. Setiap kali, pengurus panti mencatat banyaknya nasi bungkus yang pernah diberikan oleh Pak Hasan.

**Petunjuk**

Tahap penyelesaian soal nomor 3 dapat dilihat pada contoh soal 1 dan 2.

Jumat Ke-	Banyaknya Nasi Bungkus	Total Nasi Bungkus yang Pernah Diberikan
1	10	10
2	10	20
3	10	30

Kolom ketiga adalah total nasi bungkus yang pernah diberikan oleh Pak Hasan.

- Berapa yang tertulis dalam kolom ketiga setelah sepuluh minggu?
 - Setelah satu tahun, berapa bilangan terakhir yang tercatat?
5. Ivan membagikan permen kepada teman-temannya dengan cara tertentu. Teman pertama mendapat tiga permen. Teman kedua mendapat lima permen. Teman ketiga mendapat tujuh permen. Dia melanjutkan pola ini hingga sepuluh temannya mendapat permen. Berapa permen yang didapat oleh teman kesepuluh?

2. Barisan Geometri



Ayo, Mengingat Kembali

Lima anak berbagi kue dengan aturan berikut.

- Anak pertama mengambil setengah kue dan memberikan sisanya kepada anak kedua.
- Anak kedua mengambil setengah dari kue yang diterimanya dan memberikan sisanya kepada anak ketiga.
- Demikian seterusnya. Setiap anak mengambil setengah dari yang diterimanya dan memberikan sisanya kepada anak berikutnya.

Perbandingan kue yang diambil dengan kue yang diterima konstan. Dikatakan rasio kue yang diambil terhadap kue yang diterima adalah setengah.

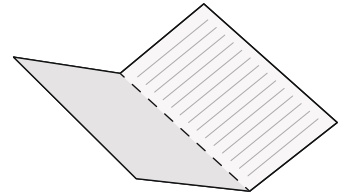
Rasio adalah hal yang penting dalam Barisan Geometri. Mari, belajar tentang Barisan Geometri.

Eksplorasi 2.3 Melipat kertas



Ayo, Bereksplorasi

Siapkan kertas berbentuk persegi panjang. Ayo, bereksplorasi melipat kertas beberapa kali. Jika kertas tersebut dilipat sebanyak 1 kali seperti pada **Gambar 2.4**, maka kertas akan terbagi menjadi 2 bagian sama besar. Lanjutkan melipat kertas sebanyak beberapa kali, lalu tuliskan jumlah bagian sama besar yang terbentuk pada **Tabel 2.2**.



Gambar 2.4 Kertas Dilipat Satu Kali

Tabel 2.2 Jumlah Lipatan Kertas dan Bagian Sama Besar yang Terbentuk

Jumlah melipat kertas	1 kali	2 kali	3 kali	4 kali
Banyaknya bagian sama besar yang terbentuk	2 bagian	... bagian	... bagian	... bagian



Ayo, Berpikir Kreatif

Temukan cara melipat kertas yang berbeda. Bagaimana dengan jumlah bagian sama besar yang terbentuk? Apakah sama dengan yang ada pada tabel? Jelaskan.

- Apakah banyaknya bagian yang sama besar pada lipatan kertas membentuk barisan bilangan?
- Aturan apa yang terdapat pada barisan bilangan tersebut?
- Operasi hitung apa yang ada di antara suku-suku pada barisan bilangan di atas?

$$\begin{array}{ccccccc}
 2 & & 4 & & 8 & & \dots \\
 \text{---} & & \text{---} & & \text{---} & & \text{---} \\
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots
 \end{array}$$

- Ayo amati rasio antara dua suku yang berdekatan.

$$\begin{array}{l}
 \frac{U_2}{U_1} = \frac{\dots}{\dots} = \dots \\
 \frac{U_3}{U_2} = \frac{\dots}{\dots} = \dots
 \end{array}$$

$$\frac{U_4}{U_3} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$$

- Apakah rasio antara dua suku yang berdekatan selalu sama?

Suatu barisan dengan rasio antara dua suku berurutan selalu tetap atau konstan disebut **BARISAN GEOMETRI**. Rasio pada barisan geometri dilambangkan dengan r .

Seperti yang telah diuraikan di atas, untuk mencari rasio dapat dengan membagi dua suku yang berurutan. Dengan demikian, dapat dituliskan sebagai berikut.

$$r = \frac{U_2}{U_1}$$

$$r = \frac{U_3}{U_2}$$

$$r = \frac{U_4}{U_3} \text{ dan seterusnya}$$

Jadi, rasio pada barisan geometri dapat dinyatakan dengan

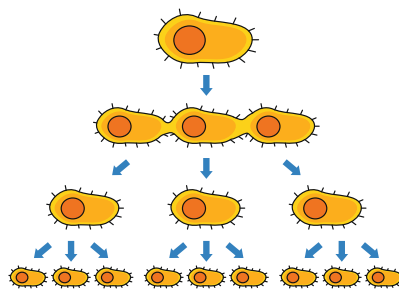
$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Eksplorasi 2.4 Pembelahan Bakteri



Ayo, Bereksplorasi

Bakteri merupakan makhluk hidup yang berkembang biak dengan cara membelah diri. Dalam waktu dua jam, satu sel bakteri membelah diri menjadi 3 bagian seperti pada **Gambar 2.5**. Ayo, mencari jumlah bakteri setelah 20 jam, jika jumlah awal adalah 2 sel bakteri.



Gambar 2.5 Pembelahan pada Bakteri

Untuk menentukan jumlah sel bakteri setelah 20 jam, kamu harus melengkapi pernyataan di bawah ini.

- Suku pertama pada permasalahan di atas adalah

- Tiap dua jam, membelah menjadi 3, maka rasio pada barisan di atas adalah

Dalam 20 jam, terjadi pembelahan sebanyak $20 \text{ jam} : 2 \text{ jam} = \dots$ kali

$$\rightarrow n = 10.$$

$$U_{\dots} = \dots$$

$$U_1 = 2$$

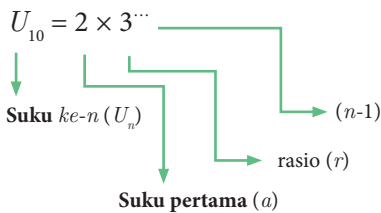
$$U_2 = 2 \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_3 = 2 \times \dots \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_4 = 2 \times \dots \times \dots \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_5 = 2 \times \dots \times \dots \times \dots \times \dots \quad (2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}) = 2 \times 3^{\dots}$$

$$U_{10} = 2 \text{ dikali } 3 \text{ sebanyak } \dots \text{ kali}$$



Jadi, rumus umum menentukan suku $ke-n$ pada barisan geometri adalah:

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Keterangan:

$$U_n = \text{suku ke-}n \quad a = \text{suku pertama} \quad n = \text{nomor suku} \quad r = \text{rasio}$$

Contoh 3

Suku pertama dari suatu barisan geometri adalah 4 dan suku ke-4 adalah 108. Tentukan rasio dari barisan tersebut.

Alternatif penyelesaian:

$$\begin{aligned} a &= 4 \\ U_4 &= 108 \\ a \cdot r^{4-1} &= 108 \\ 4 \cdot r^3 &= 108 \quad (\text{substitusi nilai } a) \\ r^3 &= \frac{108}{4} \\ &= 27 \\ r &= \sqrt[3]{27} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Jadi, rasio barisan geometri tersebut adalah 3.

Contoh 4

Seutas tali dibagi menjadi 5 bagian dengan ukuran panjang membentuk suatu barisan geometri. Jika tali yang paling pendek adalah 16 cm dan tali yang paling panjang adalah 81 cm, maka tentukan panjang tali pada potongan ketiga.

Alternatif penyelesaian:

Tali yang paling pendek : $a = 16$

Tali yang paling panjang : $U_5 = 81$
 $U_3 = \dots$

Kalian harus menentukan rasio terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}U_5 &= 81 \\a \cdot r^{(5-1)} &= 81 \\a \cdot r^4 &= 81 \quad (\text{substitusi nilai } a) \\(16) \cdot r^4 &= 81 \\r^4 &= \frac{81}{16} \\r &= \sqrt[4]{\frac{81}{16}} \\r &= \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} \\r &= \frac{3}{2} \\U_3 &= a \cdot r^{(3-1)} \\U_3 &= 16 \cdot r^{(2)} \\U_3 &= 16 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\U_3 &= 16 \cdot \frac{9}{4} \\U_3 &= 36\end{aligned}$$



Petunjuk

Pada soal mengenai barisan geometri, dapat juga memanfaatkan konsep sifat bilangan eksponen.

Jadi, panjang tali pada potongan ketiga adalah 36 cm.

Latihan 2.2

1. Tuliskan dua suku berikutnya dari barisan bilangan di bawah ini.

a. $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots, \dots$

c. $2, 2, 4, 12, \dots$

b. $25, 5, 1, \dots, \dots$

d. $3, 3, 3, 3, \dots$

Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 1.

- Apakah barisan di atas merupakan barisan geometri atau aritmetika? Bagaimana kamu mengetahuinya? Lalu, tentukan dua suku berikutnya dari barisan di atas.
- Jika bukan keduanya, maka aturan apa yang ada pada barisan bilangan tersebut? Ayo diskusikan dengan teman kelompokmu.

2. Tentukan suku ke-10 dari barisan $64, 32, 16, 8, \dots$

Pertanyaan singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 2.

- Berapa rasio pada barisan tersebut?

- $U_n = ar^{n-1}$

Maka, suku ke-10 = $U_{10} = \dots \dots \dots$

3. Jika diketahui barisan geometri dengan suku ke-2 = 80 dan suku ke-6 = 5. Tentukan tiga suku pertama dari barisan geometri tersebut.

4. Dina mengirimkan sebuah foto kepada tiga orang temannya. Keesokan harinya, setiap teman ini akan mengirimkan foto itu kepada tiga temannya. Demikian seterusnya, setiap orang yang menerima foto akan meneruskan foto itu kepada tiga teman lain di hari berikutnya.

Jika diasumsikan setiap orang hanya menerima foto satu kali, berapa orang yang menerima foto pada hari keenam?

5. Dalam proses pembelahan sel, satu sel membelah menjadi dua, dua sel membelah menjadi empat, dan seterusnya (pada setiap tahap, setiap sel membelah menjadi dua sel). Berapa sel yang ada pada tahap ke-20?



Ayo, Berpikir Kreatif

Berikan contoh aplikasi barisan bilangan dalam kehidupan sehari-hari selain dari yang telah dibahas pada subbab A.



Ayo, Berpikir Kritis

Seorang temanmu mengatakan bahwa jika rasio pada barisan geometri berupa bilangan bulat/bilangan pecahan positif, maka barisan geometri tersebut terdiri atas bilangan bulat/pecahan positif. Dan apabila rasionya bilangan bulat/pecahan negatif, maka barisan geometri tersebut terdiri atas bilangan bulat/pecahan negatif. Setujukah kamu dengan pendapatnya? Jelaskan.



Ayo, Berefleksi

Pernyataan	Bisa	Perlu Bantuan	Belum Bisa
1. Saya dapat membedakan barisan aritmetika dengan barisan geometri.			
2. Saya dapat menentukan suku ke- n dari suatu barisan aritmetika.			
3. Saya dapat menentukan suku ke- n dari suatu barisan geometri.			

B. Deret



Ayo, Mengingat Kembali

Barisan bilangan, terdiri atas barisan aritmetika dan barisan geometri.

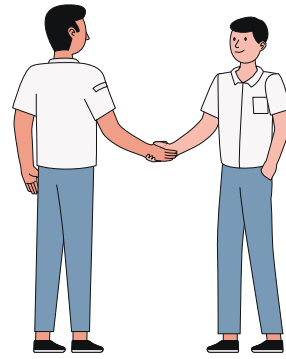
- Beda pada barisan aritmetika dinyatakan dengan $b = U_n - U_{n-1}$
- Suku ke- n barisan aritmetika dinyatakan dengan $U_n = a + (n - 1)b$.
- Rasio pada barisan geometri dinyatakan dengan $r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$.
- Suku ke- n barisan geometri dinyatakan dengan $U_n = a \cdot r^{n-1}$

Eksplorasi 2.5 Jabat Tangan



Ayo, Bereksplorasi

Ayo bereksplorasi dengan melakukan jabat tangan dengan beberapa teman yang ada di kelompokmu. Setiap pasangan berjabat tangan tepat satu kali.



Gambar 2.6 Siswa SMA Saling Berjabat Tangan



Ayo, Berdiskusi

Setelah itu, jawablah pertanyaan berikut dengan berkolaborasi bersama anggota kelompok.

1. Jika ada 2 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
2. Jika ada 3 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
3. Jika ada 4 orang, berapa banyak jabat tangan yang terjadi?
4. Berapa total siswa dalam kelompokmu, dan berapa banyak jabat tangan yang terjadi? Bagaimana kamu mengetahuinya?



Ayo, Berpikir Kritis

Apakah banyak jabat tangan di atas membentuk barisan? Jelaskan jawabanmu.

Dari **Eksplorasi 2.5**, banyak jabat tangan yang terjadi dapat dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 2.3 Banyak Jabat Tangan yang Terjadi di Kelas

Banyaknya orang yang hadir	Banyak jabat tangan	Uraian dari banyak jabat tangan
Dua orang	1	1
Tiga orang	3	1 + 2
Empat orang	..	1 + ... + ...
Lima orang	...	1 + ... + ... + ...

- Apakah uraian dari jumlah jabat tangan merupakan bentuk penjumlahan dari barisan bilangan?

Bentuk penjumlahan dari barisan bilangan akan membentuk deret bilangan. Jadi, **deret bilangan adalah jumlah suku-suku penyusun barisan bilangan**. Deret bilangan, terdiri atas deret aritmetika dan deret geometri.

1. Deret Aritmetika



Tahukah Kalian?

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) adalah seorang matematikawan Jerman yang telah menunjukkan bakatnya sejak kecil. Ketika duduk di kelas 4 SD, guru matematikanya memberikan soal berupa penjumlahan bilangan

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$$

Tidak membutuhkan waktu yang lama, Gauss yang saat itu masih berusia 10 tahun langsung menjawab “5.050”.

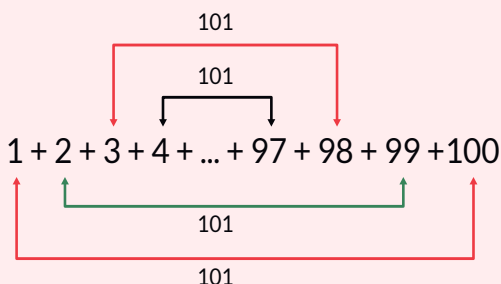
Berikut cara Gauss menyelesaikan penjumlahan bilangan tersebut.



Gambar 2.7

Carl Friedrich Gauss

Sumber: Christian Albrecht Jensen/
id.wikipedia.org (2009)



Ia mengelompokkan suku-suku pada deret tersebut sehingga memiliki nilai yang sama ketika dijumlahkan.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 &= (1 + 100) + (2 + 99) + \dots + (50 + 51) \\ &= \underbrace{101 + 101 + \dots + 101}_{50 \times} \\ &= 50 \times 101 \\ &= 5.050 \end{aligned}$$

Sekarang, ayo cermati kembali deret bilangan di atas.

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$$

- Apakah bilangan pada deret di atas membentuk barisan?
- Barisan apakah yang dibentuk dari suku-suku pada deret di atas?

Deret aritmetika adalah suatu deret yang diperoleh dari menjumlahkan suku-suku pada barisan aritmetika.

Dari barisan aritmetika: $U_1, U_2, U_3, U_4, \dots, U_n$.

Dapat dibentuk deret aritmetika: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \dots + U_{10}$

$U_1 = a$	$U_6 = a + 5b$
$U_2 = a + b$	$U_7 = a + 6b$
$U_3 = a + 2b$	$U_8 = a + 7b$
$U_4 = a + 3b$	$U_9 = a + 8b$
$U_5 = a + 4b$	$U_{10} = a + 9b$

Jumlah 4 suku pertama deret aritmetika: S_4

$$\begin{aligned}
 S_4 &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \\
 &= a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) \\
 &= 4a + 6b \\
 &= 2(2a + 3b) \\
 S_4 &= \frac{4}{2}(2a + (4 - 1)b)
 \end{aligned}$$

Jumlah 10 suku pertama deret aritmetika: S_{10}

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{10} \\
 &= a + (a + b) + (a + 2b) + (a + 3b) + (a + 4b) + (a + 5b) \\
 &\quad + (a + 6b) + (a + 7b) + (a + 8b) + (a + 9b) \\
 &= 10a + 45b \\
 &= 5(2a + 9b) \\
 S_{10} &= \frac{10}{2} (2a + (10 - 1)b)
 \end{aligned}$$

Jumlah 4 suku pertama deret aritmetika	Jumlah 10 suku pertama deret aritmetika
$S_4 = \frac{4}{2} (2a + (4 - 1)b)$	$S_{10} = \frac{10}{2} (2a + (10 - 1)b)$
Dari kedua contoh di atas, maka dapat disimpulkan bahwa rumus jumlah n suku pertama deret aritmetika: $ \begin{aligned} S_n &= U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n \\ &= a + (a + b) + (a + 2b) + \cdots + (a + (n - 1)b) \end{aligned} $ S_n dapat juga dituliskan $S_n = U_n + U_{n-1} + \cdots + U_2 + U_1$ $ \begin{array}{rcl} S_n & = & a \quad + \quad a + b \quad + \quad \cdots + \quad a + (n - 1)b \\ S_n & = & a + (n - 1)b \quad + \quad a + (n - 2)b \quad + \quad \cdots + \quad a \\ \hline 2S_n & = & \underbrace{2a + (n - 1)b \quad + \quad 2a + (n - 1)b \quad + \quad \cdots + \quad 2a + (n - 1)b}_{n \times} + \end{array} $ $ \begin{aligned} 2S_n &= n \times [2a + (n - 1)b] \\ 2S_n &= n \times [a + a + (n - 1)b] \\ 2S_n &= n (U_1 + U_n) \\ S_n &= \frac{n}{2} (U_1 + U_n) \end{aligned} $	



Ayo, Berpikir Kritis

Bisakah kamu membuktikan dengan cara yang berbeda?

Rumus untuk menghitung jumlah **suku-suku deret aritmetika** adalah

$$S_n = \frac{n}{2} (a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2} (2a + (n - 1)b)$$

Keterangan:

S_n = jumlah deret sebanyak n suku pertama

a = suku pertama

b = beda

n = banyaknya suku



Ayo, Mencoba

Dengan rumus di atas, ayo hitunglah berapa jumlah deret bilangan

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100 = \dots$$

Apakah hasilnya sama dengan penghitungan Gauss?

Contoh 5

Diketahui deret: $13 + 16 + 19 + 22 + \dots$

Jumlah 30 suku pertama deret tersebut adalah

Alternatif penyelesaian:

Suku pertama atau $a = 13$

$$b = 3$$

$$n = 30$$

$$S_{30} = \frac{30}{2} [2(13) + (30 - 1)3]$$

$$= 15(26 + 29 \cdot 3)$$

$$= 15(26 + 87)$$

$$= 15 \cdot 113$$

$$= 1.695$$

2. Deret Geometri

Eksplorasi 2.6 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19



Ayo, Bereksplorasi

Di suatu kota tercatat peningkatan yang signifikan dari jumlah pasien yang terinfeksi Covid-19. Berikut data yang dihimpun dari Gugus Covid-19 kota tersebut.

Tabel 2.4 Jumlah Pasien Terinfeksi Covid-19 dalam Waktu 5 Bulan

Bulan	Januari 2020	Februari 2020	Maret 2020	April 2020	Mei 2020
Jumlah pasien	4	12	36	108	324

Jawablah pertanyaan di bawah ini terkait data pada **Tabel 2.4**.

- Apakah jumlah pasien membentuk barisan bilangan?
- Berapa beda atau rasio dari barisan tersebut?
- Berapa suku barisan tersebut?



Ayo, Bekerja Sama

Ayo cermati jumlah suku-suku deret geometri dengan melengkapi **Tabel 2.5** melalui data yang ada pada **Tabel 2.4** bersama teman kelompokmu.

Tabel 2.5 Proses Menemukan Kembali Rumus Jumlah Deret Geometri

	1	2	3
S_2 : jumlah pasien dua bulan pertama	$S_2 = 4 + 12 = \dots$	$S_2 = \frac{36 - 4}{3 - 1} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_2 = \frac{U_3 - U_1}{r - 1}$
S_3 : jumlah pasien tiga bulan pertama	$S_3 = \dots + \dots + \dots = 52$	$S_n = \frac{\dots - 4}{3 - 1} = \frac{\dots}{\dots} = 52$	$S_3 = \frac{U_{\dots} - U_1}{r - 1}$
S_4 : jumlah pasien empat bulan pertama	$S_4 = \dots + \dots + \dots + \dots = \dots$	$S_4 = \frac{\dots - \dots}{\dots - \dots} = \frac{\dots}{\dots} = \dots$	$S_4 = \frac{U_{\dots} - U_1}{r - 1}$

Dari kolom nomor 3 diperoleh:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{U_{n+1} - U_1}{r - 1} \\ &= \frac{ar^{(n+1)-1} - a}{r - 1} \\ &= \frac{ar^n - a}{r - 1} \\ S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \end{aligned}$$

Sehingga, **rumus** untuk menghitung jumlah **suku-suku deret geometri** adalah:

$$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ atau } S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} \text{ untuk } r \neq 1$$

Keterangan:

S_n = jumlah deret sebanyak n suku pertama

a = suku pertama

r = rasio

n = banyaknya suku



Ayo, Berpikir Kritis

Apa yang terjadi jika $r = 1$?

Contoh 6

Hasil produksi sebuah perusahaan sepeda pada tahun 2020 meningkat setiap bulannya dan membentuk barisan geometri. Produksi pada bulan Januari sebanyak 120 unit. Pada bulan April, hasil produksi mencapai 3.240 unit. Berapakah total hasil produksi sepeda hingga bulan Mei?

Alternatif penyelesaian:

Hasil produksi Januari: $U_1 = a = 120$

Hasil produksi April: $U_4 = 3.240$

Total hasil produksi hingga bulan Mei: S_5

Sebelum menentukan S_5 , harus dicari ratio (r) terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}a &= 120 \\U_4 &= 3.240 \\a \cdot r^3 &= 3.240 \\120 \cdot r^3 &= 3.240 \quad (\text{substitusi nilai } a) \\r^3 &= \frac{3.240}{120} \\&= 27 \\r &= \sqrt[3]{27} \\&= 3 \\S_n &= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \\S_5 &= \frac{120(3^5 - 1)}{3 - 1} \\&= \frac{120(243 - 1)}{2} \\&= 60 \cdot 242 \\&= 14.520\end{aligned}$$

Jadi, total hasil produksi sepeda hingga bulan Mei adalah sebanyak 14.520 unit.

Latihan 2.3

1. Tentukanlah jumlah bilangan kelipatan 4 di antara bilangan 10 dan 99.

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 1.

- Tuliskan terlebih dahulu bilangan kelipatan 4 dari 10 hingga 100:
- $12 + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$
- Suku terakhir dari deret bilangan tersebut adalah
- Suku terakhir: $U_n = a + (n - 1)b$



Petunjuk

Untuk mengetahui banyaknya suku pada deret tersebut, kamu harus mengetahui suku pertama, beda dan banyak suku terlebih dahulu.

- Selanjutnya, menentukan S_n dengan nilai n yang telah diketahui sebelumnya.
 - Jadi, jumlah bilangan kelipatan 4 di antara bilangan 10 dan 99 adalah
2. Suku pertama dan rasio dari suatu deret geometri berturut-turut adalah 9 dan 3. Tentukan banyak suku jika diketahui jumlah deret bilangan tersebut adalah 9.837.

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 2.

- Dari soal, diketahui:

$$a = \dots \qquad r = \dots \qquad S_n = \dots$$
 - Dengan tiga informasi di atas, maka dapat ditentukan $n = \dots$
3. Diketahui deret geometri berikut ini: $\frac{3}{2} + 3 + 6 + 12 + \dots + Y = \frac{762}{4}$
Tentukan nilai Y .

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 3.

- Dengan nilai a , r dan S_n yang telah terdapat pada soal, kamu akan mendapatkan nilai n .
 - Setelah memperoleh nilai n , kamu dapat menentukan nilai Y .
4. Vina membagikan permen kepada tujuh temannya dengan cara tertentu. Teman pertama mendapat dua permen. Teman kedua mendapat lima permen. Teman ketiga mendapat delapan permen. Dia melanjutkan pola ini, setiap teman mendapat tiga permen lebih banyak daripada teman sebelumnya, sampai semua temannya mendapat permen. Berapa permen yang harus Vina siapkan?
5. Dani mengirimkan sebuah foto kepada dua orang temannya. Keesokan harinya, setiap teman ini akan mengirimkan foto itu kepada dua temannya. Demikian seterusnya, setiap orang yang menerima foto akan meneruskan foto itu kepada dua teman lain di hari berikutnya. Jika diasumsikan setiap orang hanya menerima foto satu kali, setelah tujuh hari, berapa orang yang telah melihat foto tersebut?

3. Deret Geometri Tak Hingga

Eksplorasi 2.7 Memotong Kertas



Ayo, Bereksplorasi

Untuk eksplorasi ini kamu membutuhkan selembar kertas origami.

1. Lipat kertas menjadi dua bagian yang sama besar dan gunting sesuai lipatan.
2. Ambil salah satu potongan kertas, lipat menjadi dua bagian yang sama besar dan gunting sesuai lipatan. Potongan kertas ini besarnya $\frac{1}{4}$ dari kertas origami awal.
3. Ambil salah satu potongan kertas dan lakukan hal yang sama. Potongan kertas ini besarnya _____ dari kertas origami awal.
4. Lakukan seterusnya.
5. Kumpulkan potongan-potongan kertas yang ada. Perhatikan bahwa potongan-potongan kertas tersebut, makin lama makin kecil ukurannya.
6. Tulislah deret yang menyatakan nilai potongan-potongan kertas ini.
 $S_n =$ _____
7. Susun potongan-potongan kertas tersebut menyerupai bentuk kertas origami utuh.

a.



Ayo Berpikir Kreatif

Apa artinya fakta ini bagi nilai S_n

b. Pikirkan: berapa hasil penjumlahan deret ini?

Eksplorasi 2.7 adalah salah satu contoh deret geometri yang hasilnya mendekati suatu nilai tertentu. Deret geometri yang mempunyai sifat seperti ini adalah deret geometri yang memiliki $|r| < 1$. Amati bahwa untuk nilai $|r| < 1$, makin besar nilai n maka nilai r^n makin kecil, namun selalu merupakan bilangan positif. Dengan kata lain, makin lama makin mendekati nilai 0.

Deret geometri tak hingga adalah deret geometri yang memiliki banyak sekali suku (tak terhingga banyaknya). Ada dua jenis deret geometri tak hingga.

- Deret geometri konvergen. $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}$ adalah salah satu contoh deret geometri konvergen. Deret geometri konvergen memiliki $|r| < 1$ dan jumlah deretnya menuju ke suatu nilai tertentu. (Konvergen artinya menuju ke suatu nilai tertentu.)

$$\begin{array}{rcccccccc} S & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & ar^3 & + & \dots \\ rS & = & & & ar & + & ar^2 & + & ar^3 & + & \dots \end{array}$$

$$(1 - r)S = a$$

$$S = \frac{a}{1 - r}$$

- Deret geometri divergen, yaitu deret geometri yang memiliki nilai $|r| > 1$. Pada deret geometri divergen, S_n makin lama makin besar, tanpa batasan tertentu. Dikatakan nilai $S_n = \pm\infty$.

Latihan 2.4

1. Suku pertama suatu deret geometri tak hingga adalah x . Tentukan x yang memenuhi sehingga jumlah deret geometri tak hingga tersebut adalah 10.

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 1.



Petunjuk

Dalam menyelesaikan soal deret tak hingga, kamu harus selalu ingat syarat rasio dari deret konvergen maupun divergen

- Soal di atas hanya berisi informasi yaitu $S_\infty = 10$.
- Karena $S_\infty = 10$ maka deret geometri tak hingga yang dimaksud pada soal adalah deret geometri tak hingga konvergen.
- Hubungkan rumus jumlah deret geometri tak hingga dengan syarat rasio pada deret konvergen.

2. Agar deret geometri $1 + (m - 1) + (m - 1)2 + (m - 1)3 + \dots$ merupakan deret konvergen, tentukan nilai m .

Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 2.

- Tentukan terlebih dahulu rasio dari deret tersebut.
3. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga $4 + 12 + 36 + 108 + \dots$
- Petunjuk singkat di bawah ini dapat membantumu dalam menjawab soal nomor 3.
- Selidiki terlebih dahulu, deret geometri tak hingga tersebut merupakan deret konvergen atau divergen.
 - Tentukan S_{∞} .

Melalui subbab B, kamu telah belajar mengenai deret aritmetika dan geometri.



Ayo, Berefleksi

Pernyataan	Bisa	Perlu Bantuan	Belum Bisa
1. Saya dapat menjelaskan perbedaan deret aritmetika dan deret geometri.			
2. Saya dapat menjelaskan perbedaan deret geometri tak hingga konvergen dan divergen			



Ayo, Berpikir Kreatif

Berikan contoh aplikasi deret bilangan dalam kehidupan sehari-hari selain dari yang telah dibahas.

Berikan contoh aplikasi deret geometri tak hingga konvergen dan divergen selain dari yang telah dibahas pada subbab B.

Latihan 2.5

1. Suku ke-3 suatu barisan aritmetika adalah 28.500 dan suku ke-7 adalah 22.500. Tentukan nilai n agar suku $ke-n = 0$.
2. Suku ketiga dan kelima barisan geometri berturut-turut adalah 20 dan 80. Tentukan suku ke-10 barisan tersebut.
3. Hitunglah jumlah dari deret berikut.
 - a. $1 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} + \cdots \dots \dots + \frac{23}{3}$
 - b. $\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \cdots \dots \dots + 243$
4. Sebuah kue dimakan bersama oleh dua orang kakak beradik. Kakak mengambil sepertiga kue. Adik mengambil sepertiga dari sisanya. Lalu kakak mengambil sepertiga dari sisanya. Demikian seterusnya.
 - a. Jika banyaknya kue yang diambil dituliskan, deret apakah yang didapatkan?
 - b. Apakah deret ini konvergen? Jelaskan alasannya!
 - c. Jika deret ini konvergen, berapakah jumlahnya?
5. Bola tenis dilemparkan ke atas setinggi 1 m. Bola tersebut akan terus memantul sampai akhirnya berhenti. Setelah dicermati, setiap kali bola memantul, tingginya menjadi $\frac{1}{4}$ kali dari tinggi pantulan sebelumnya. Kira-kira berapa panjang lintasan bola sampai akhirnya berhenti?
6. Pertambahan penduduk di suatu desa setiap tahunnya membentuk barisan geometri. Pada tahun 2021, penduduk bertambah sebanyak 10 orang, lalu pada tahun 2023 sebanyak 90 orang. Berapa jumlah pertambahan penduduk pada tahun 2025?
7. Pak Artus seorang peternak ayam. Ia mengumpulkan telur ayam sebanyak 30.000 butir selama 2 bulan. Banyak telur yang Pak Artus kumpulkan membentuk barisan aritmetika. Pada hari pertama ia mengumpulkan telur ayam sebanyak 50 butir. Berapa butir telur yang Pak Artus kumpulkan pada hari terakhir?
8. Penambahan jumlah pasien yang terjangkit virus Covid-19 di suatu kota melonjak dua kali lipat di tiap minggunya. Berdasarkan data yang di rumah sakit, pada minggu pertama terdapat 24 orang yang dinyatakan

positif. Pada minggu ketiga, tercatat 96 pasien positif Covid-19. Berapa total jumlah pasien pada bulan kedua?

9. Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian 8 meter. Apabila ketinggian yang dicapai saat memantul tiga perlima kali tinggi sebelumnya, tentukan panjang lintasan yang dilalui bola tersebut hingga berhenti memantul.
10. Keliling lima buah lingkaran membentuk barisan aritmetika. Jika luas lingkaran terbesar adalah 1.368 cm^2 dan luas lingkaran terkecil adalah 154 cm^2 . Tentukan keliling lingkaran pada urutan ketiga. $\pi = \frac{22}{7}$
11. Sisipkan 5 bilangan di antara 3 dan 192 agar susunan bilangan tersebut membentuk barisan geometri.
12. Sisi segitiga sama sisi panjangnya 20 cm. Di dalamnya terdapat segitiga sama sisi kedua dengan menghubungkan titik-titik tengah sisi-sisi segitiga pertama. Hal yang sama untuk segitiga ketiga, keempat, kelima, dan keenam. Berapa total keliling semua segitiga?

C. Bunga

Jika kalian menabung uang di bank, kalian akan mendapatkan bunga. Sebaliknya, jika kamu meminjam uang dari bank, maka bank akan mengenakan bunga. Menurut Otoritas Jasa Keuangan, bunga simpanan adalah balas jasa dari bank kepada nasabah atas jasa nasabah menyimpan uangnya di bank. Sedangkan bunga pinjaman adalah balas jasa yang ditetapkan bank kepada peminjam atas pinjaman yang didupakannya. Ada dua jenis bunga, yaitu bunga tunggal dan bunga majemuk.

1. Bunga Tunggal

Bunga tunggal adalah bunga yang besarnya hanya ditentukan oleh pokok uangnya. Seberapa lamanya uang disimpan di bank, bunganya hanya tergantung nilai pokok uangnya.

Angga menabung di bank sebesar Rp1.000.000,00. Setiap tahun dia mendapat bunga sebesar 5%.

Eksplorasi 2.8 Tabungan dengan Bunga Tunggal



Ayo, Bereksplorasi

1. Lengkapilah tabel berikut

Tahun	Bunga	Nilai Uang
1	$50\% \times 1.000.000 = 50.000$	$1.000.000 + 50.000 = 1.050.000$
2	$50\% \times 1.000.000 = 50.000$	$1.050.000 + 50.000 = 1.100.000$
3	$50\% \times 1.000.000 = 50.000$	$1.100.000 + 50.000 = 1.150.000$
4	$50\% \times 1.000.000 = 50.000$	$1.150.000 + 50.000 = 1.200.000$

2. Perhatikan kolom nilai uang. Barisan jenis apakah yang dibentuk oleh nilai uang yang disimpan dengan bunga tunggal?

Barisan _____ dengan $U_1 = \dots$ dan $b = \dots$

3. Tentukan bentuk umum untuk nilai uang setelah disimpan n tahun.

$U_n = \dots$

Nilai uang yang disimpan di bank dengan bunga tunggal membentuk barisan _____.

2. Bunga Majemuk

Dalam perhitungan bunga majemuk, bunga yang didapat dalam periode sebelumnya dimasukkan ke pokok tabungan. Bunga periode berikutnya dihitung dengan nilai pokok tabungan yang baru.

Eksplorasi 2.9 Tabungan dengan Bunga Majemuk

1. Lengkapilah tabel berikut.

Tahun	Pokok	Bunga	Tabungan
1	1.000.000	$5\% \times 1.000.000$ $= 50.000$	$1.000.000 + 50.000$ $= 1.050.000$
2	1.050.000	$5\% \times 1.050.000$ $= 52.500$	$1.050.000 + 52.500$ $= 1.102.500$

Tahun	Pokok	Bunga	Tabungan
3	1.102.500	$5\% \times 1.102.500$ $= \dots\dots$	$1.102.500 + \dots\dots$ $= \dots\dots$

2. Perhatikan kolom nilai uang. Barisan jenis apakah yang dibentuk oleh nilai uang yang disimpan dengan bunga majemuk?

Barisan _____ dengan $U_1 = \dots$ dan $r = \dots$

3. Tentukan bentuk umum untuk nilai uang setelah disimpan tahun.
 $U_1 = \dots$

Nilai uang yang disimpan di bank dengan bunga majemuk membentuk barisan _____.

Latihan 2.6

- Firman menyimpan uang sejumlah Rp10.000.000,00 di bank dalam bentuk deposito dengan bunga 3% per tahun. Setiap tahun bank mengirim bunga ke rekening tabungan Firman.
 - Berapa bunga yang diterima Firman di rekening tabungannya setiap tahun?
 - Berapa uang Firman setelah satu tahun?
 - Berapa uang Firman setelah dua tahun?
 - Berapa uang Firman setelah lima tahun?
- Gigih juga memiliki deposito sejumlah Rp10.000.000,00 di bank dengan bunga 3% per tahun. Setiap tahun, saat perpanjangan deposito, Gigih meminta bank untuk menambahkan bunganya ke dalam nilai depositonya.
 - Lengkapilah tabel berikut.

Tahun	Pokok	Bunga	Tabungan
1			

Tahun	Pokok	Bunga	Tabungan
2			
3			

- b. Berapa uang Gigih setelah satu tahun?
 - c. Berapa uang Gigih setelah dua tahun?
 - d. Setelah lima tahun, lebih banyak uang Firman atau Gigih? Berapa selisihnya?
 - e. Jika kamu memiliki uang seperti Firman dan Gigih, apa yang akan kamu lakukan? Mengapa?
 - f. Dalam keadaan seperti apa kamu akan bertindak seperti Firman? Seperti Gigih?
3. Made meminjam uang sejumlah Rp2.500.000,00 dengan bunga 4% per tahun. Dia berjanji mengembalikan selama dua tahun dengan cicilan tetap setiap bulan. Berapakah cicilan yang harus dia bayarkan setiap bulannya?
4. Dina meminjam uang senilai Rp3.000.000,00 dengan bunga 3% per tahun selama tiga tahun. Dia mencicil utangnya setiap tahun. Pokok utang yang telah dibayar, tidak dibayarkan lagi bunganya. Lengkapilah tabel berikut.

Tahun ke-	Nilai Utang	Cicilan Pokok	Bunga	Cicilan Utang
1	3.000.000	1.000.000	$3\% \times 3.000.000 =$	$1.000.000 + \dots = \dots$
2	2.000.000	1.000.000	$3\% \times 2.000.000 =$	
3	1.000.000			

Uji Kompetensi

1. Tentukan suku ke-10 dan jumlah 10 suku pertama dari deret berikut.
 - a. $4 + 2 + 1 + \dots$
 - b. $4 + 1 + (-2) + \dots$
2. Tentukan suku ke-9 barisan aritmetika, jika diketahui jumlah dari suku ke-2, suku ke-5, dan suku-20 adalah 54.
3. Sebuah pipa dipotong menjadi 5 bagian. Panjang setiap bagian membentuk barisan geometri. Jika potongan pipa terpendek sepanjang 4 cm, dan potongan pipa terpanjang adalah 324 cm, maka tentukan panjang pipa semula.
4. Pada suatu ruang pertemuan, jumlah kursi pada baris tertentu lebih banyak 2 kursi dari baris sebelumnya. Perbandingan banyak kursi pada baris ke-5 dan baris ke-13 adalah 1 : 2. Baris terakhir terisi 50 kursi. Berapa total kursi pada ruang pertemuan tersebut?
5. Tentukan jumlah deret geometri tak hingga $\frac{1}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{1}{xy^2} + \dots \dots \dots$, jika diketahui $\frac{x+y}{xy} = 1$.

Pengayaan

Selain barisan dan deret aritmetika dan geometri, ada barisan dan deret yang lain, salah satunya barisan dan deret Fibonacci. Contoh barisan Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Barisan Fibonacci memiliki sifat $U_n = U_{n-1} + U_{n-2}$ dengan berbagai nilai U_1 dan U_2 .

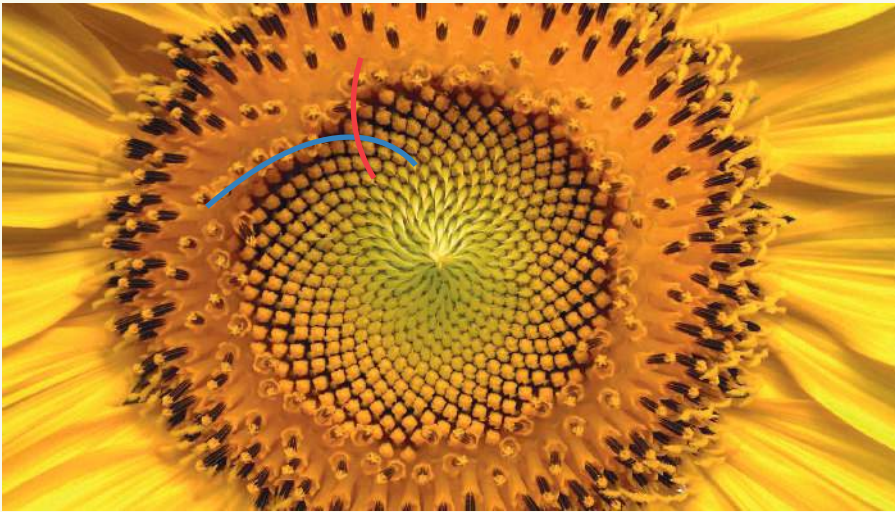
Perhatikan bilangan pada barisan Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Kapan bilangannya genap dalam barisan?

Apakah ada polanya? Mengapa?

Bilangan Fibonacci manakah yang dapat dibagi habis 3?



Gambar 2.8 Bunga Matahari
Sumber: Wofeypoo/Pixabay (2013)

Barisan Fibonacci dapat ditemukan di alam. Salah satunya pada bunga matahari. Jika kamu menghitung banyaknya spiral pada susunan biji bunga matahari pada **Gambar 2.8** yang searah dengan garis biru, kamu akan mendapatkan 34 spiral. Sedangkan yang searah dengan garis berwarna merah ada 55 spiral.

Refleksi

Pertanyaan Asesmen Diri	bisa	perlu bantuan	belum bisa
1. Saya dapat membedakan barisan aritmetika dengan barisan geometri.			
2. Saya dapat menentukan suku ke- n dari suatu barisan aritmetika dan suatu barisan geometri.			
3. Saya dapat menentukan suku ke- n dari suatu barisan geometri.			
4. Saya dapat menentukan jumlah n suku pertama dari suatu barisan aritmetika			

Pertanyaan Asesmen Diri	bisa	perlu bantuan	belum bisa
5. Saya dapat menentukan jumlah n suku pertama dari suatu barisan geometri.			
6. Saya dapat membedakan bunga tunggal dan bunga majemuk.			
7. Saya dapat menghitung bunga tunggal dan bunga majemuk.			

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.

ISBN: 978-623-118-558-7

Bab

3

Perbandingan Trigonometri



Mengapa perbandingan trigonometri berguna dalam kehidupan sehari-hari?

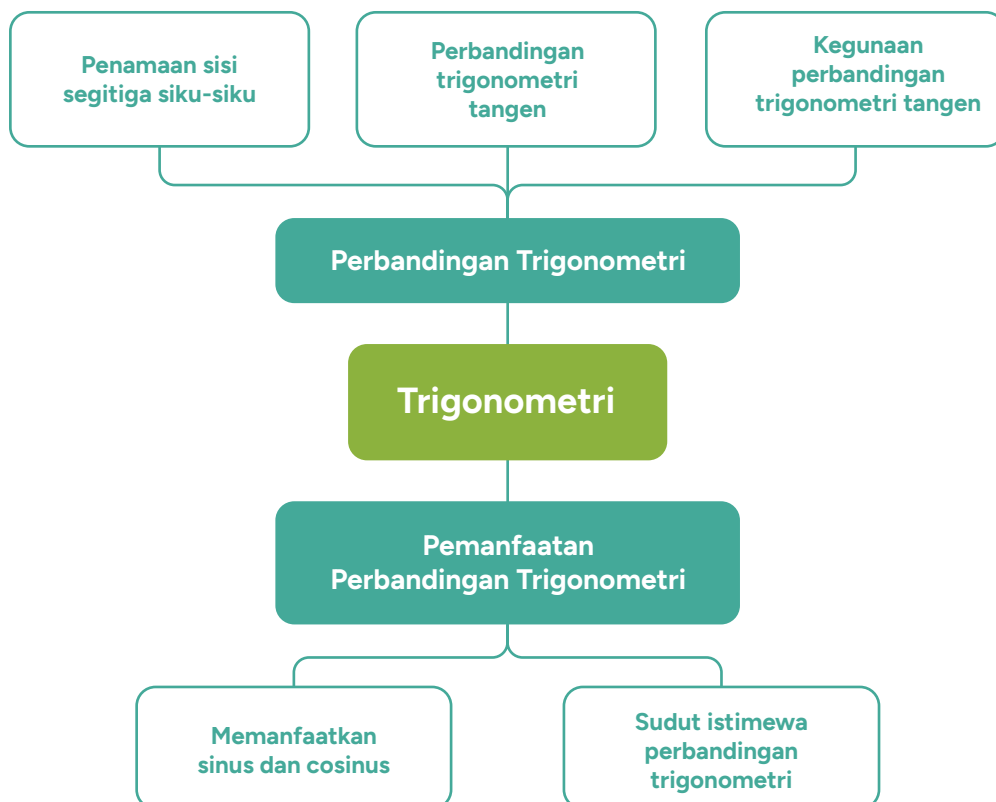
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kamu dapat memahami bahwa perbandingan trigonometri menunjukkan hubungan antara sudut dan sisi pada segitiga siku-siku. Selain itu, kamu diharapkan mampu menerapkan perbandingan trigonometri dalam permasalahan.

Kata Kunci

- perbandingan trigonometri
- sinus ($\sin$)
- cosinus ($\cos$)
- tangen ($\tan$)

Peta Materi



Coba lihat gambar dan keterangan gunung tertinggi di Indonesia dan di dunia berikut ini.

Gunung Tertinggi di Indonesia

Puncak Jaya atau Carstensz
Pyramid

4.884 m



Gambar 3.1 Puncak Jaya

Sumber: Alfindra Primaldhi/commons.wikimedia.org (2007)

Gunung Tertinggi di Dunia

Gunung Everest

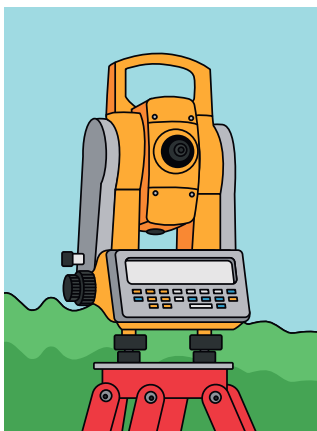
8.849 m



Gambar 3.2 Gunung Everest

Sumber: Vyacheslav Argenberg/commons.wikimedia.org (2009)

Tinggi Gunung Everest hampir dua kali lipat dibanding tinggi Gunung



Gambar 3.3 Teodolit

Puncak Jaya, sungguh menakjubkan! Apakah pernah terpikir di benakmu bagaimanakah cara manusia menentukan tinggi gunung?

Jawabannya adalah dengan trigonometri. Untuk mengukur tinggi gunung maupun gedung pencakar langit, seorang insinyur memerlukan alat bernama Teodolit. Alat teodolit adalah salah satu contoh alat yang menerapkan prinsip trigonometri dan yang berguna bagi permasalahan sehari-hari manusia.

Trigonometri merupakan suatu metode mengukur secara tidak langsung yang memanfaatkan pola perbandingan antara sudut dan sisi segitiga. Istilah trigonometri berasal dari kata Yunani *trigono*, yang berarti segitiga, dan *metri*, yang berarti pengukuran. Pada Bab 3, kamu akan mempelajari jenis-jenis perbandingan trigonometri pada segitiga siku-siku dan menyelesaikan permasalahan matematika dalam kehidupan sehari-hari menggunakan prinsip perbandingan trigonometri.

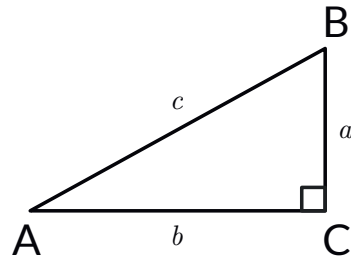


Ayo, Mengingat Kembali

Untuk siap mempelajari perbandingan trigonometri, **kamu perlu mengingat teorema Pythagoras yang berlaku pada segitiga siku-siku.**

Pada segitiga siku-siku berlaku persamaan berikut:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



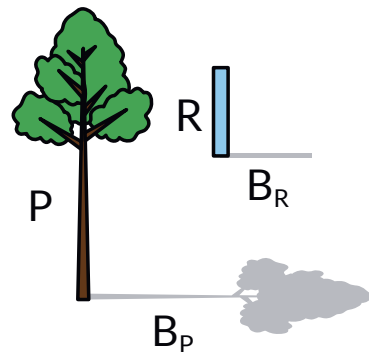
Gambar 3.4 Teorema Pythagoras

Kamu juga perlu mengingat mengenai rasio (perbandingan).

Apa itu rasio atau nilai perbandingan?

Rasio adalah nilai/bilangan yang menjelaskan keterkaitan antara dua hal.

Misalnya, diketahui nilai perbandingan tinggi penggaris dengan pohon adalah $\frac{1}{100}$. Jika tinggi penggaris 3 cm dan tinggi bayangan 6 cm, kita dapat mengambil kesimpulan bahwa tinggi pohon adalah 300 cm dan tinggi bayangan pohon adalah 600 cm.



Gambar 3.5 Pohon dan Penggaris

Terakhir, kamu juga perlu mengingat konsep kesebangunan segitiga.

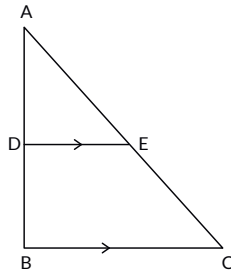
Konsep ini juga mempunyai hubungan dekat dengan konsep rasio atau perbandingan.

Dua segitiga dapat memenuhi syarat kesebangunan jika:

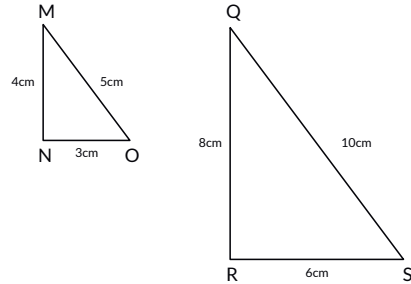
- setiap pasang sudut yang berpadanan sama besar atau
- setiap pasang sisi yang berpadanan sebanding (mempunyai nilai rasio yang sama) atau
- dua pasang sisi yang berpadanan sebanding dan sudut apit dari kedua sisi tersebut sama besar.

Segitiga ADE dan segitiga ABC adalah dua segitiga yang sebangun.

Segitiga MNO dan segitiga QRS juga merupakan contoh segitiga sebangun.



Gambar 3.6 Segitiga Sebangun 1



Gambar 3.7 Segitiga Sebangun 2



Ayo, Berdiskusi

Mengapa segitiga-segitiga pada **Gambar 3.6** dan **3.7** dikatakan sebangun?

A. Perbandingan Trigonometri

Panjang garis keliling bumi adalah 40.030 km. Tahukah kamu kalau 2.000 tahun yang lalu seorang matematikawan telah menemukan perkiraan bilangan yang sama? Tonton video dengan memindai QR code-nya dan lihat aksi nyata manfaat perbandingan trigonometri. Kamu dapat menyetel fungsi terjemah otomatis dari YouTube jika dirasa perlu.

Bayangan dan perbandingan sudut bayangan telah terbukti bermanfaat dalam kisah Eratosthenes yang kamu tonton. Kamu dapat membaca ringkasan terjemahan video mengenai Eratosthenes dalam lampiran. Ayo, sekarang kamu lakukan kegiatan eksplorasi dengan perbandingan bayangan.



Pindai QR code berikut untuk menonton video.
<https://buku.kemdikbud.go.id/s/gwoana>



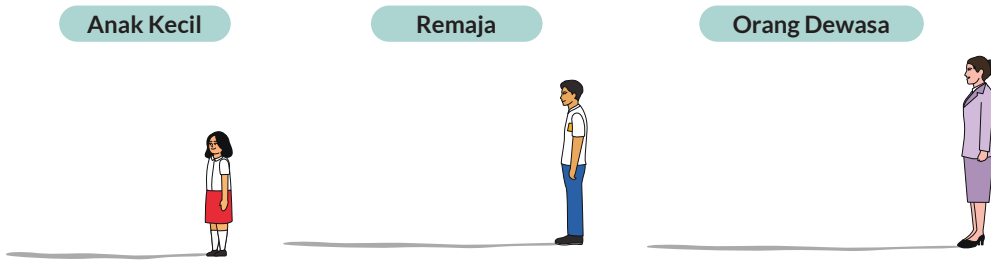
Pindai QR code berikut untuk membaca ringkasan terjemahan video mengenai Eratosthenes.
<https://buku.kemdikbud.go.id/s/wvfcu6>

Eksplorasi 3.1 Bayangan dan Tinggi Badan



Ayo, Bereksplorasi

Gambar 3.8 menunjukkan tiga orang dengan tinggi yang berbeda sedang berdiri membelakangi sumber cahaya. Dapat dilihat ketiga bayangan memiliki panjang yang beragam. Orang dewasa memiliki bayangan yang lebih panjang karena ia lebih tinggi.



Gambar 3.8 Bayangan Tiga Orang



Ayo, Mencoba

Kamu dapat melakukan kegiatan berikut dengan mengumpulkan data bayangan dan tinggi badan tiga orang yang berbeda secara mandiri. Pastikan kamu punya waktu yang cukup untuk melakukan percobaan mandiri ini.

- Gunakan penggaris dan ukur tinggi badan dan bayangan anak kecil, remaja, dan orang dewasa pada **Gambar 3.8**.

	Anak kecil	Remaja	Orang dewasa
Tinggi badan	____ cm	____ cm	____ cm
Tinggi bayangan	____ cm	____ cm	____ cm

- Cari nilai perbandingan tinggi badan dan bayangan setiap orangnya. Sebelum melakukan penghitungan matematikanya, coba pikirkan apakah nilai perbandingannya akan sama atau berbeda?

Nilai perbandingan tinggi badan dan bayangan		
Anak kecil	Remaja	Orang dewasa



Petunjuk

Nilai perbandingan ditemukan dengan membagi tinggi badan dengan tinggi bayangan.

Apakah yang kamu temukan? Menurutmu, mengapa bisa demikian?

- Tarik garis dari ujung kepala setiap orangnya ke ujung kepala bayangannya.
- Gunakan busurmu dan ukur sudut yang terbentuk antara bayangan dan garis miring yang kamu tarik pada langkah 3.

Apakah yang kamu temukan? Menurutmu, mengapa bisa demikian?

	Anak kecil	Remaja	Orang dewasa
Besarnya Sudut			

- Jika kamu mengetahui tinggi anak kecil, apakah tinggi orang dewasa dapat dicari?



Ayo, Bekerja Sama

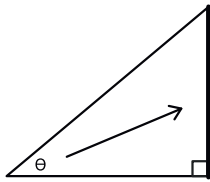
Diskusikanlah jawaban diskusi dan pastikan setiap dari kalian menjelaskan pemikiran kalian untuk bekerja sama mencari jawaban yang tepat.

1. Penamaan Sisi Segitiga Siku-siku

Prinsip nilai perbandingan yang digunakan untuk mencari tinggi orang dewasa dapat diterapkan untuk mencari tinggi sebuah gedung pencakar langit maupun tinggi gunung. Perbandingan trigonometri secara sederhana adalah perbandingan nilai segitiga siku-siku yang istimewa dan berguna. Ketiga sisi dalam segitiga siku-siku mempunyai nama tertentu.

Tiga nama untuk setiap sisi segitiga adalah:

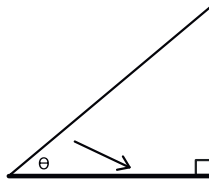
1. Sisi depan



Gambar 3.9 Sisi Depan

Definisi: sisi yang berada tepat di depan sudut θ .

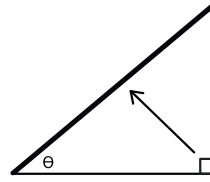
2. Sisi samping



Gambar 3.10 Sisi Samping

Definisi: sisi yang berada di samping sudut θ .

3. Sisi miring (hipotenusa)



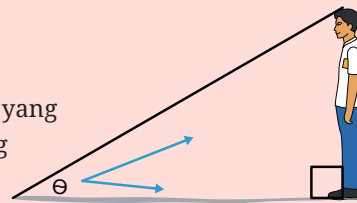
Gambar 3.11 Sisi Miring

Definisi: sisi yang berada di seberang sudut siku-siku.



Ayo, Berpikir Kritis

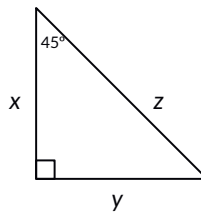
Menggunakan contoh di kegiatan eksplorasi, yang mana sisi depan, sisi samping, dan sisi miring segitiganya?



Gambar 3.12 Contoh Bayangan

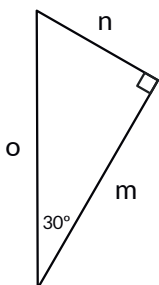
Latihan 3.1

1. Tentukan nama yang tepat untuk setiap sisi segitiga siku-siku pada **Gambar 3.13**!



Gambar 3.13 Segitiga dengan Sisi XYZ

2. Putri menamakan sisi segitiga sebagai berikut.



Sisi depan adalah sisi m.

Sisi samping adalah sisi n.

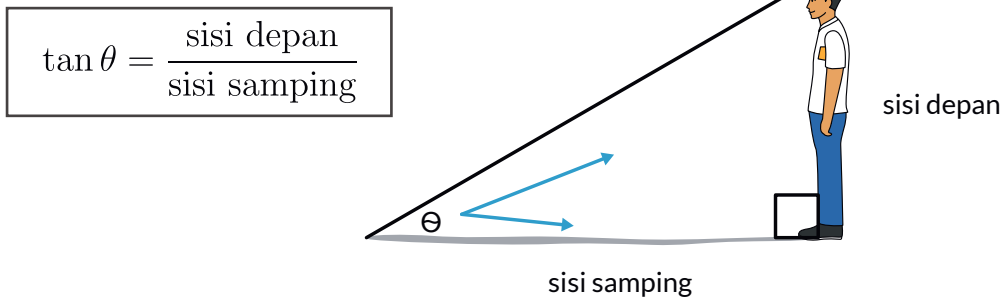
Sisi miring (hipotenusa) adalah sisi o.

Coba tuliskan anjuran untuk Putri memperbaiki pemahamannya! Dalam anjuranmu, pastikan ada penjelasan alasannya.

2. Satu Jenis Perbandingan Trigonometri: Tan θ

Kamu sudah mencari nilai perbandingan tinggi badan dan bayangan dari setiap orang. Pada **Eksplorasi 3.1** ditemukan bahwa nilai perbandingannya sama (yaitu sekitar 0,57) dan besar sudut yang terbentuk juga sama (30°).

Nilai perbandingan ini mempunyai nama khusus, yaitu **tangen atau disingkat tan**. Jadi, tangen suatu sudut dapat ditentukan dengan membagi panjang sisi depan dengan sisi samping segitiga.



Gambar 3.14 Tangen adalah perbandingan sisi depan terhadap sisi samping

Catatan: ada dua jenis perbandingan trigonometri lainnya, yaitu sinus dan cosinus. Kamu akan mempelajarinya lebih dalam di subbab B.

Contoh yang kamu kerjakan menunjukkan bahwa $\tan 30^\circ = 0,57$.

Perhatikan bahwa nilai $\tan 30^\circ$ merupakan nilai perbandingan.

Berdasarkan **Eksplorasi 3.1** kamu dapat melihat bahwa nilai tan hanya ditentukan oleh besarnya sudut. Jika sudut berubah maka nilai tan pasti berubah. Jadi, untuk sudut yang besarnya sama proporsionalitas merupakan konsep yang penting dalam memahami perbandingan trigonometri.

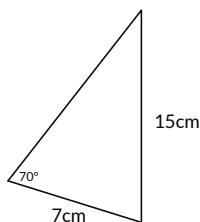


Ayo, Berpikir Kreatif

Dapatkan kamu memikirkan kegiatan-kegiatan yang memerlukan nilai perbandingan yang tetap atau konsep proporsionalitas?

Latihan 3.2

1.



Apakah kamu dapat mencari nilai perbandingan $\tan 70^\circ$? Jelaskan Mengapa!

2. Bagilah tugas dengan teman sekelasmu untuk membuat 3 segitiga siku-siku yang salah satu sudutnya sebesar 40° . Pastikan ukuran ketiga segitiga tersebut berbeda-beda. Tandai sudut siku-siku dan sudut 40° serta nama setiap sisinya.



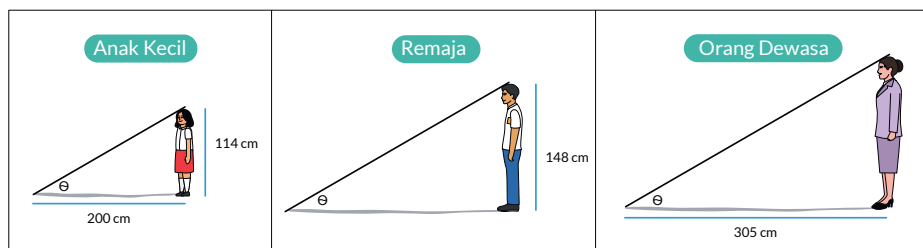
Ayo, Bekerja Sama

Jika ada lebih dari 3 orang dalam kelompokmu, berikan tugas umum kepada anggota keempat seperti “pemeriksa akhir” yang bertugas memeriksa ketepatan hasil gambar segitiga.

3. Carilah nilai perbandingan sisi depan dan sisi samping sudut 40° menggunakan salah satu segitiga yang sudah dibuat.
4. Carilah nilai $\tan 40^\circ$ menggunakan salah satu segitiga yang sudah dibuat.
5. Diskusikan dengan teman sekelasmu: Apakah jawaban nomor 2 dan 3 setiap dari kalian sama? Apakah nilai $\tan 40^\circ$ berupa nilai perbandingan? Jelaskan alasanmu.

3. Kegunaan Perbandingan Trigonometri $\tan \theta$

Dengan mengetahui nilai perbandingan tinggi anak kecil dan bayangannya ($\tan \theta$), kamu dapat mencari panjang bayangan anak remaja dan tinggi orang dewasa yang sebenarnya.



Gambar 3.15 Segitiga-Segitiga Sebangun dari Bayangan Tiga Orang

Ketiga gambar yang ada pada **Gambar 3.15** adalah segitiga sebangun, sehingga dapat ditulis:

$$\frac{\text{tinggi anak kecil}}{\text{panjang bayangan anak kecil}} = \frac{\text{tinggi anak remaja}}{\text{panjang bayangan remaja}} = \frac{\text{tinggi orang dewasa}}{\text{panjang bayangan orang dewasa}}$$

Untuk mencari panjang bayangan remaja:

Cara pertama: menggunakan perbandingan segitiga sebangun.

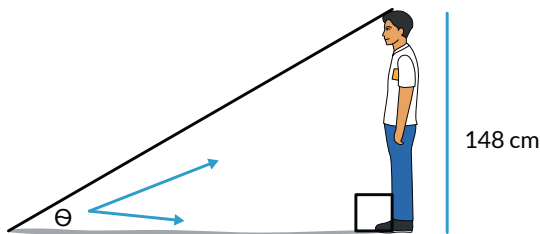
$$\begin{aligned} \frac{\text{tinggi anak kecil}}{\text{panjang bayangan anak kecil}} &= \frac{\text{tinggi anak remaja}}{\text{panjang bayangan anak remaja}} \\ \frac{114 \text{ cm}}{200 \text{ cm}} &= \frac{148 \text{ cm}}{x \text{ cm}} \\ x \text{ cm} &= \frac{148 \times 200 \text{ cm}}{114 \text{ cm}} \\ x \text{ cm} &= \frac{29.600 \text{ cm}}{114 \text{ cm}} \\ x \text{ cm} &= 259,65 \text{ cm} \end{aligned}$$

Panjang bayangan remaja adalah 259,65 cm.

Cara kedua: memanfaatkan perbandingan trigonometri.

Diketahui bahwa $\tan 30^\circ = 0,57$.

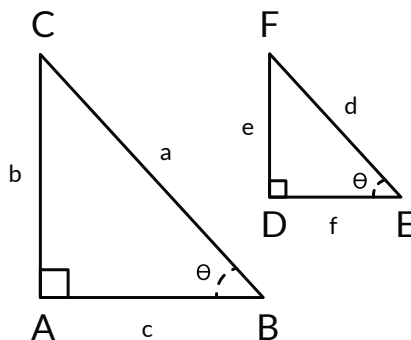
$$\tan \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$



$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} \\ \tan \theta &= \frac{148 \text{ cm}}{x \text{ cm}} \\ \tan 30^\circ &= \frac{148 \text{ cm}}{x \text{ cm}} \\ 0,57 &= \frac{148 \text{ cm}}{x \text{ cm}} \\ x &= 259,65 \text{ cm} \end{aligned}$$

Latihan 3.3

- Gunakan contoh yang baru disampaikan untuk mencari tinggi orang dewasa.
 - Cari tinggi orang dewasa dengan menggunakan perbandingan segitiga sebangun.
 - Cari tinggi orang dewasa dengan memanfaatkan perbandingan trigonometri.
- Diketahui kedua segitiga di samping adalah segitiga sebangun dengan perbandingan sisi $\tan \theta = 0,47$;
 - Jika sisi $b = 12$ cm, hitung panjang sisi c !
 - Diketahui segitiga FDE mempunyai ukuran $\frac{1}{3}$ dari segitiga CAB. Hitung panjang sisi c dan sisi f !



Latihan 3.4

- Diketahui $\tan \angle A = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{1}{4}$.

Gambarlah sebuah segitiga siku-siku yang memenuhi nilai perbandingan tersebut. Berikan label dan panjang sisi depan serta sisi sampingnya dalam cm!

- Cari panjang x !



Ayo, Menggunakan Teknologi

Hati-hati jangan salah satuannya!

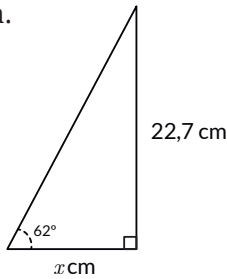
- Bisa menggunakan kalkulator
- Bisa menggunakan website GeoGebra



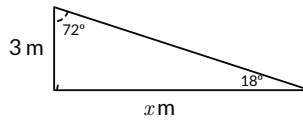
Ayo, Berpikir Kreatif

Ada cara untuk mencari panjang x tanpa menggunakan kalkulator sama sekali. Apakah kamu tahu caranya?

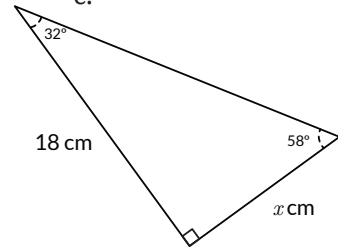
a.



b.



c.

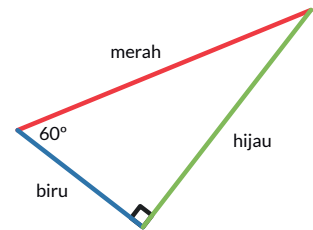


3. Soal ini terdiri atas empat bagian.

Bagian pertama:

Perhatikan segitiga berikut dan tentukan nama sisinya berdasarkan sudut 60° !

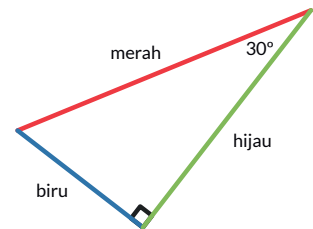
- Sisi berwarna merah adalah sisi _____.
- Sisi berwarna hijau adalah sisi _____.
- Sisi berwarna biru adalah sisi _____.



Bagian kedua:

Segitiga berikut adalah segitiga yang sama dengan segitiga pada soal pertama. Sekarang, tentukan nama sisinya berdasarkan sudut 30° !

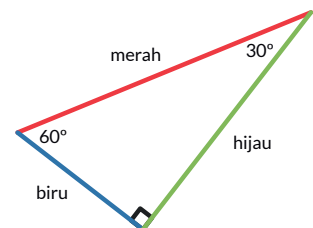
- Sisi berwarna merah adalah sisi _____.
- Sisi berwarna hijau adalah sisi _____.
- Sisi berwarna biru adalah sisi _____.



Bagian ketiga:

Segitiga berikut adalah segitiga yang sama dengan segitiga pada soal pertama dan kedua. Sekarang, tentukan nama sisi berdasarkan sudut yang ditentukan!

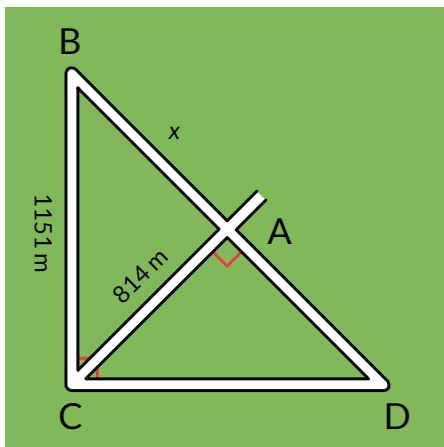
- Sisi depan sudut 30° berwarna _____.
- Sisi depan sudut 60° berwarna _____.
- Sisi samping sudut 30° berwarna _____.



Bagian keempat:

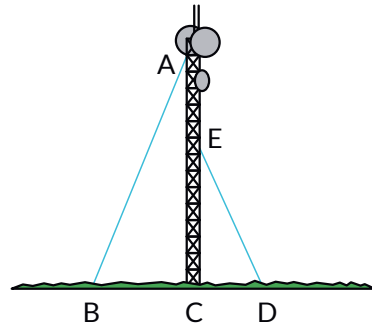
Gunakan jawabanmu pada soal nomor pertama untuk menyelesaikan permasalahan berikut.

- a. Apakah sisi depan sudut 30° dan 60° sama atau berbeda? Mengapa demikian?
 - b. Apakah sisi samping sudut 30° dan 60° sama atau berbeda? Mengapa demikian?
 - c. Apakah sisi miring sudut 30° dan 60° sama atau berbeda? Mengapa demikian?
4. Diketahui $\tan \angle A = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{4}{3}$.
- a. Gambarlah dua segitiga siku-siku yang berbeda, namun tetap memenuhi nilai perbandingan tersebut.
 - b. Apakah ada lebih dari dua segitiga yang memenuhi nilai perbandingan tersebut? Jelaskan alasanmu.
5. Seorang ahli perencana kota perlu membangun jalan dari titik B ke titik A.



- a. Cari panjang jalan yang perlu ia rencanakan untuk menghubungkan titik B ke A.
- b. Cari nilai perbandingan antara jarak titik C ke A dengan jarak titik C ke B. Catatan: nilai ini adalah nilai perbandingan trigonometri sinus.
- c. Cari nilai perbandingan antara jarak titik A ke B dengan jarak titik C ke B. Catatan: nilai ini adalah nilai perbandingan trigonometri cosinus.
- d. Jika segitiga ABC dan segitiga ADC sebangun, cari panjang CD!

6. Seorang teknisi sedang memperbaiki sebuah menara pemancar yang mempunyai tinggi 150 meter. Jarak antara titik B dan D adalah 125 meter.
- Jika sudut yang terbentuk oleh kedua tangga adalah 60° , hitung jarak BC.
 - Cari juga jarak CD.



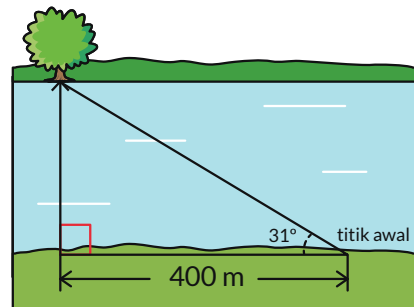
7. Standar sudut mendarat pesawat yang direkomendasikan untuk kenyamanan dan kemulusan adalah 3° . Jika pesawat sedang berada di ketinggian 200 meter, berapa jarak antara posisi pesawat sekarang dengan posisi pendaratannya yang ideal?



Petunjuk

Kamu mungkin perlu menggambar segitiga siku-siku berdasarkan konteks pertanyaan terlebih dahulu.

8. Seorang ahli bangun perlu mengukur lebar sungai untuk mempersiapkan pembangunan jembatan. Pertama, ahli bangun tersebut memberikan tanda di titik awalnya dan melihat ada pohon besar di seberang sungai. Ia kemudian berjalan sambil mengukur jarak, sampai posisinya sejajar dengan pohon. Jarak yang baru saja ia tempuh adalah 400 meter. Ia kemudian kembali ke titik awal dan mengukur sudut perputaran arah ke posisi pohon dengan teodolit. Ia mendapatkan sudut sebesar 31° .



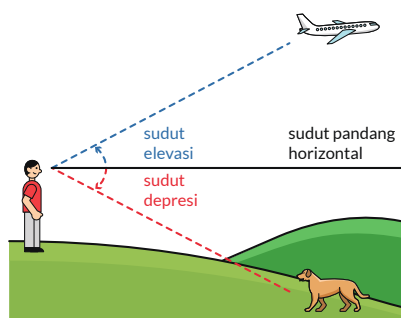
- Tentukan panjang rancangan jembatan yang seharusnya berdasarkan informasi yang ada.
- Untuk memastikan penghitungannya tepat, ahli bangun memilih titik awal yang berbeda dan mengukur jarak serta sudutnya. Ia mendapatkan sudut perputaran 36° serta jarak 330,8 meter. Tanpa melakukan penghitungan matematika, berikan penjelasan apakah strategi yang digunakan ahli bangun tersebut tepat atau tidak tepat.

9. Dimas sedang mencoba mencari tinggi tiang bendera. Dengan bantuan teman dan alat busur, ia memperkirakan sudut yang terbentuk antara kepala dan ujung tiang bendera adalah 34° .
- Jarak antara Dimas dan tiang bendera adalah 52 m. Cari panjang sisi depan berdasarkan sudut dan jarak yang diketahui.
 - Teman Dimas beranggapan bahwa jawaban di bagian a merupakan tinggi tiang bendera yang sesungguhnya. Dimas tidak setuju dengan pernyataan itu. Bagaimana pendapatmu? Jelaskan alasannya.

Pengayaan

Proyek Membuat Klinometer

Pada subbab pertama, kamu telah melihat kegunaan perbandingan trigonometri untuk mengukur tinggi objek yang besar tanpa harus mengukurnya secara langsung. Kamu akan merakit sebuah alat bernama klinometer yang berfungsi mengukur sudut kemiringan, elevasi (tingkat kenaikan), atau depresi (tingkat penurunan). Kemudian, kamu akan melakukan percobaan mengukur tinggi objek di lingkunganmu.



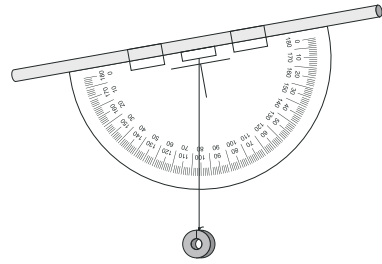
Gambar 3.16 Sudut Elevasi dan Sudut Depresi

Untuk membuat klinometer, siapkan alat dan bahan berikut.

- Selotip dan gunting
- 1 sedotan
- 1 busur
- 1 tali atau benang sepanjang 30 cm
- 1 pemberat (berupa klip kertas, koin, atau panah yang terbuat dari karton)
- 1 kertas tebal (karton atau potongan kardus) dengan ukuran kurang lebih 15 x 25 cm

Langkah membuat klinometer:

- Dengan selotip, lekatkan ujung tali tepat di tengah/pusat busur
- Tempel atau kaitkan pemberat pada ujung tali yang lain
- Tempel busur pada salah satu sudut kertas tebal (lihat contoh **Gambar 3.17**).
- Tempelkan sedotan sepanjang sisi panjang kertas tebal (lihat contoh **Gambar 3.17**).
- Coba gunakan klinometer dengan menggunakan sedotan untuk melihat beberapa objek di kejauhan.



Gambar 3.17 Klinometer Sederhana



Ayo, Berpikir Kritis

Coba pikirkan dan tuliskan caramu menghitung sudut elevasi atau sudut depresinya!

Mengukur Tinggi dengan Klinometer

Ikuti langkah-langkah ini untuk mengukur tinggi objek menggunakan klinometer yang baru kamu buat.

1. Pilih 2 objek yang dapat jelas dilihat.
2. Jalan membelakangi dan menjauhi objek sekitar 10-15 langkah.
3. Ukur jarak antara kakimu dengan titik dasar objek. Catat jaraknya pada tabel berikut.
4. Tanpa berpindah, gunakan klinometer untuk melihat titik puncak (titik tertinggi) objek melalui sedotan.
5. Dengan tidak bergerak, minta teman sekelas untuk membacakan angka sudut pada busur.



Ayo, Berpikir Kritis

Apakah sudut yang disebutkan merupakan sudut elevasi? Diskusikan dengan teman sekelasmu.

6. Tuliskan sudut elevasinya pada tabel dan hitung $\tan \theta$ dengan metode apapun.

Dengan semua informasi yang kamu miliki saat ini, kamu seharusnya dapat menghitung tinggi objek. Apabila kamu kesulitan, coba ilustrasikan informasi yang kamu miliki pada tabel berikut.

	Objek 1: _____	Objek 2: _____
Jarak		
Sudut elevasi (θ)		
$\tan \theta$		
Tinggi objek		
Ilustrasi objek 1		Ilustrasi objek 2

 **Petunjuk**

Dalam ilustrasimu, pastikan ada segitiga siku-siku.

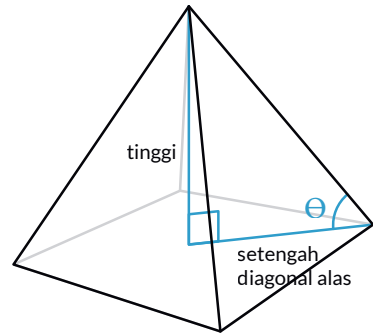
B. Pemanfaatan Perbandingan Trigonometri



Gambar 3.18 Piramida di Mesir
Sumber: Jeremy Bishop/unsplash.com

Piramida adalah bangunan menakjubkan yang dibangun sekitar 4.500 tahun yang lalu. Bayangkan banyak pekerja dan persiapan yang diperlukan untuk membuat bangunan seperti ini, tanpa tersedia alat canggih seperti zaman sekarang.

Jika digambar secara sederhana, ukuran piramida ditentukan oleh tinggi, panjang setengah diagonal alas, dan besar sudut seperti pada **Gambar 3.19**. Segitiga yang ada di gambar adalah segitiga siku-siku. Pada Piramida Giza, piramida yang tertua dan terbesar di dunia, sudut θ adalah sebesar 41° .



Gambar 3.19 Tinggi dan setengah diagonal alas Piramida

Eksplorasi 3.2 Tinggi dan Setengah Diagonal Alas Piramida



Ayo, Bereksplorasi

Gunakan imajinasimu untuk menjawab beberapa pertanyaan yang berkaitan dengan Gambar 3.19. Jika perlu kamu boleh menggambar bayanganmu untuk membantu menjawab. Sebelum menjawab pertanyaan-pertanyaan tandai sisi sisi depan, sisi samping, dan sisi miring (hipotenusa) dari segitiga siku-siku yang ada dalam Gambar 3.19. Perhatikan posisi sudut θ .

1. Jika sudut tetap sama tetapi ingin dibangun piramida yang lebih tinggi, maka apa yang akan terjadi dengan alasnya?
2. Jika tinggi piramida tetap sama tetapi alasnya berubah, maka apa yang akan terjadi dengan sudutnya?
3. Jika alas piramida tetap sama tetapi tingginya berubah, maka apa yang terjadi dengan sudutnya?
4. Buatlah kesimpulan sehubungan dengan pertanyaan 1-3.



Ayo, Berdiskusi

Setelah berpikir dan bekerja mandiri, diskusikan jawabanmu bersama dengan teman sekelas.

- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi sampingnya ($\tan \theta$)?
- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi depan dan sisi miring segitiga siku-siku?

- Jika sudut θ dibuat lebih besar, bagaimana perubahan nilai perbandingan sisi samping dan sisi miring segitiga siku-siku?

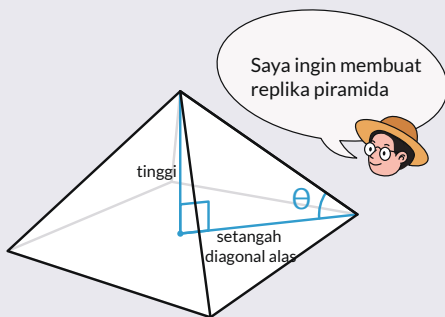
1. Perbandingan Trigonometri dalam Piramida

Pada awal bab, kamu juga diminta menghitung nilai perbandingan selain perbandingan nilai tangen.

- Nilai perbandingan sisi depan terhadap sisi miring disebut sebagai sinus.
- Nilai perbandingan sisi samping terhadap sisi miring disebut sebagai cosinus.

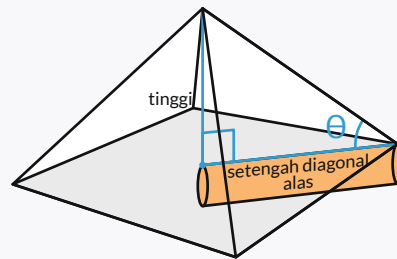
Simak dua skenario berikut untuk melihat penerapan perbandingan sinus dan cosinus dalam piramida.

Seorang pengagum piramida ingin membuat replika piramida. Ia tahu $\theta = 41^\circ$ dan panjang rusuk piramida adalah 600 m. Untuk membangun replika, ia juga perlu mengetahui tinggi piramidanya.

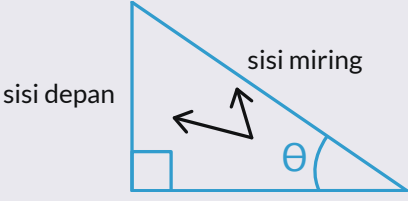
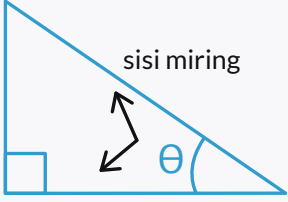


Gambar 3.20 Membuat replika piramida

Seorang sejarawan ingin membuat lorong bawah tanah agar ia dapat masuk ke bagian tengah piramida. Ia mengetahui bahwa $\theta = 41^\circ$.



Gambar 3.21 Membuat lorong bawah tanah

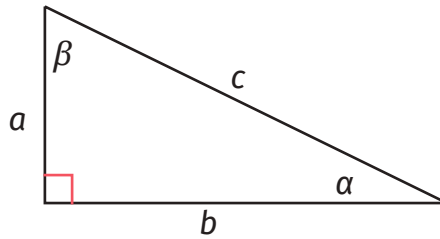
	
Perbandingan trigonometri sinus sebuah sudut θ ($\sin \theta$) pada segitiga siku-siku adalah nilai perbandingan antara sisi depan sudut θ dan sisi miring. $\sin \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}}$ Dalam permasalahan piramida, perbandingan trigonometri sin dapat membantu kita mencari tinggi piramida. Dengan menggunakan kalkulator, kita menemukan bahwa $\sin 41^\circ = 0,66$ (dibulatkan). $\sin 41^\circ = \frac{\text{tinggi piramida (sisi depan)}}{\text{rusuk piramida (sisi miring)}}$ $\sin 41^\circ = \frac{x \text{ m}}{600 \text{ m}}$ $0,66 = \frac{x \text{ m}}{600 \text{ m}}$ $x = 0,66 \times 600 \text{ m}$ $x = 396 \text{ m}$ Tinggi piramida adalah 396 m.	Perbandingan trigonometri cosinus sebuah sudut θ ($\cos \theta$) pada segitiga siku-siku adalah nilai perbandingan antara sisi samping sudut θ dan sisi miring. $\cos \theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}}$ Dalam permasalahan piramida, perbandingan trigonometri cos dapat membantu kita mencari setengah diagonal alas dasar piramida. Dengan menggunakan kalkulator, kita menemukan bahwa $\cos 41^\circ = 0,75$ (dibulatkan). $\cos 41^\circ = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}}$ $\cos 41^\circ = \frac{\text{setengah diagonal alas}}{\text{rusuk piramida}}$ $0,75 = \frac{x \text{ m}}{600 \text{ m}}$ $x = 0,75 \times 600 \text{ m}$ $x = 450 \text{ m}$ Panjang lorong bawah tanah yang perlu digali adalah 450 m.



Tahukah Kamu?

Segitiga siku-siku memenuhi teorema Pythagoras, yaitu bahwa kuadrat sisi miringnya sama dengan jumlah kuadrat masing-masing sisi lainnya.

Ternyata, teorema Pythagoras dapat dituliskan dalam bentuk trigonometri. Menarik, bukan?



Bagaimana menyatakan Teorema Pythagoras dalam bentuk trigonometri?

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Perhatikan bahwa jika kamu membagi kedua ruas dengan c^2 maka didapatkan persamaan sebagai berikut:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{c^2}$$

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$



Ayo, Berefleksi

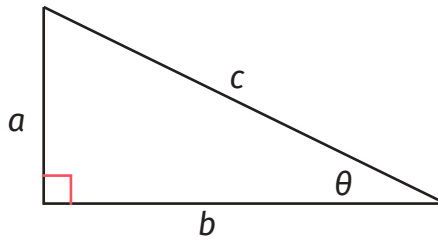
Apa perbedaan antara perbandingan trigonometri sin, cos, dan tan?

Apa persamaan antara perbandingan trigonometri sin, cos, dan tan?



Tahukah Kamu?

Kamu sudah memahami ketiga perbandingan trigonometri. Kamu dapat melihat hubungan antara ketiganya.



Perhatikan gambar segitiga siku-siku di atas. Kamu telah mengetahui perbandingan trigonometri yang berlaku:

$$\sin \theta = \frac{a}{c}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{a}{b}$$

Nilai apa yang kamu peroleh dari $\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$?

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= \sin \theta \times \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{a}{c} \times \frac{c}{b} \\ &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$= \tan \theta$$

Jadi, dapat dinyatakan bahwa:

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

Sebaiknya persamaan terakhir dimasukkan ke dalam kotak



Ayo, Berpikir Kritis

Wanimbo sedang bermain layangan. Ia berhasil menaikkan layangan sampai ketinggian 3,5 m sambil memegang ujung layangan pada ketinggian 60 cm dari permukaan tanah. Layangannya juga membentuk sudut $\angle KIT$ sebesar 20° . Coba cari panjang tali layangan yang sudah diulurkan Wanimbo.

Pikirkan, perbandingan trigonometri mana (di antara sin, cos, atau tan) yang akan bermanfaat untuk menyelesaikan permasalahan ini?

Simak jawaban salah seorang siswa di SMA 78 Kota Sukaberkah bernama Surya (fiktif): Saya perlu memanfaatkan perbandingan trigonometri sinus karena saya mengetahui ketinggian layangan dan mencari panjang tali layangan.

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ &= 0,34 = \frac{\text{tinggi layangan}}{\text{panjang tali layangan}} \\ 0,34 &= \frac{3,5 \text{ m}}{x \text{ m}} \\ x \text{ cm} &= 10,29 \text{ m}\end{aligned}$$

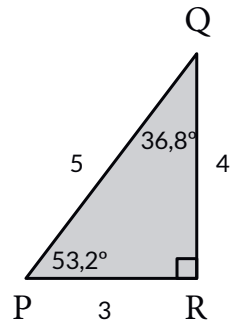


Ayo, Berdiskusi & Bekerja Sama

Jawaban Surya tidak tepat. Bersama dengan teman sekelompokmu, diskusikan apa yang tidak tepat dari solusi Surya. Pastikan setiap anggota mengerti apa yang salah kemudian carilah jawaban yang benar.

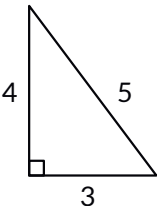
Latihan 3.5

- Sebuah segitiga siku-siku PQR, mempunyai besaran $\angle P = 53,2^\circ$ dan besaran $\angle Q = 36,8^\circ$.
 - Cari nilai $\sin 53,2$. Uraikan cara dan proses berpikirmu
 - Nilai perbandingan panjang sisi QR dan QP sama dengan nilai _____.



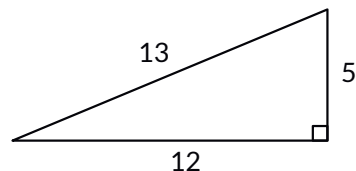
i. $\cos 53,2$

ii. $\cos 36,8$

- 

Jika $\angle A = \theta$ dan $\cos \theta = \frac{4}{5}$, tandai $\angle A$ pada gambar segitiga di samping.

- Jika $\angle M = \theta$ dan $\sin \theta = \frac{5}{13}$, tandai $\angle M$ pada gambar segitiga di samping.



4. Kerjakan secara mandiri:

Tuliskan arti **$\sin \theta$ sebagai nilai perbandingan** dengan kata-katamu sendiri. Jika dirasa perlu, kamu boleh menambahkan gambar.

Kerjakan bersama dua atau tiga teman sekelas:

Bandingkan jawabanmu dengan teman sekelasmu. Berikan masukan untuk definisi temanmu atau/dan merevisi definisimu sendiri.

Kerjakan bersama-sama satu kelas (dipimpin guru):

Bagikan secara lisan definisi yang menurutmu baik kepada seluruh kelas.

Guru akan merangkum definisi dan kegiatan ini.

5. Kerjakan secara mandiri:

Tuliskan arti **$\cos \theta$ sebagai nilai perbandingan** dengan kata-katamu sendiri! Jika dirasa perlu, kamu boleh menambahkan gambar.

Kerjakan bersama teman sekelas:

Bandingkan jawabanmu dengan teman sekelasmu. Berikan masukan untuk definisi temanmu atau/dan merevisi definisimu sendiri.

Kerjakan bersama-sama satu kelas (dipimpin guru):

Bagikan secara lisan definisi yang menurutmu baik kepada seluruh kelas.

Guru akan merangkum definisi dan kegiatan ini.

2. Tiga Serangkai Perbandingan Trigonometri

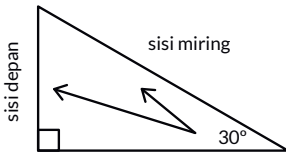
Ketika matematikawan zaman kuno mempelajari segitiga, mereka menemukan pola nilai perbandingan (rasio) panjang sisi segitiga siku-siku yang sudah kamu pelajari di subbab lalu dan subbab ini. Ada tiga perbandingan trigonometri yang sudah kamu pelajari yaitu sinus, cosinus, dan tangen.

$$\sin \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}}$$

$$\cos \theta = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}}$$

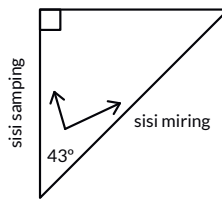
$$\tan \theta = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}}$$

$$\sin 30^\circ = 0,5$$



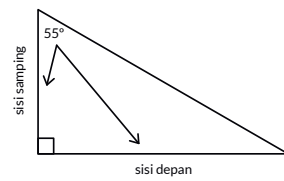
Gambar 3.22
Sin 30°

$$\cos 43^\circ = 0,73$$



Gambar 3.23
Cos 43°

$$\tan 55^\circ = 1.43$$



Gambar 3.24
Tan 55°



Ayo, Mengingat Kembali

Apakah yang dimaksud dengan sin, cos, tan sebagai nilai perbandingan?



Ayo, Menggunakan Teknologi

Coba simulasi perbandingan trigonometri di GeoGebra. Kamu dapat mengaksesnya melalui tautan berikut.

<https://buku.kemdikbud.go.id/s/2i9kwi>

Pindai QR code di samping untuk diteruskan ke simulasi pada aplikasi GeoGebra.

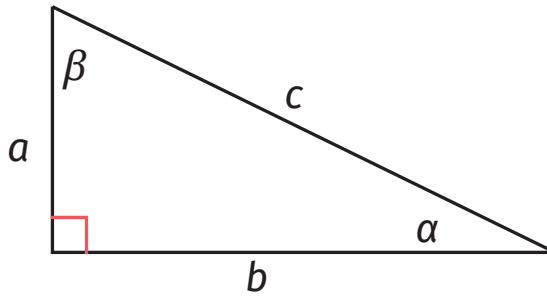


- Geser panel sampai kamu mendapatkan sudut 40° .
- Tarik salah satu titik putih pada segitiga untuk memperbesar/memperkecil ukurannya.
- Perhatikan nilai perbandingan di bagian atas, apakah nilainya sama atau berubah? Jelaskan alasanmu kepada teman sekelompok.



Tahukah Kamu?

Selain tiga perbandingan trigonometri yang sudah kamu pahami, ada lagi tiga perbandingan trigonometri yang jarang digunakan.



Ketiga perbandingan trigonometri tersebut adalah:

- secan (sec)

$$\begin{aligned}\sec \alpha &= \frac{c}{b} \\ &= \frac{1}{\cos \alpha}\end{aligned}$$

- cosecan (csc)

$$\begin{aligned}\csc \alpha &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{1}{\sin \alpha}\end{aligned}$$

- cotangen (cot)

$$\begin{aligned}\cot \alpha &= \frac{b}{a} \\ &= \frac{1}{\tan \alpha}\end{aligned}$$

3. Sudut Istimewa Perbandingan Trigonometri

Sudut istimewa dalam perbandingan trigonometri adalah sudut-sudut yang nilai perbandingannya dapat ditentukan secara eksak. Sudut istimewa akan sangat berguna dan banyak digunakan pada pelajaran Fisika.



Ayo, Bereksplorasi

Kamu akan melengkapi tabel berikut dengan nilai perbandingan trigonometrinya. Pikirkan bagaimana kamu menggunakan segitiga siku-siku yang memuat sudut-sudut tersebut dalam tabel.

	30°	45°	60°
sin			
cos		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
tan			$\sqrt{3}$



Ayo, Bekerja Sama

Coba bagi tugas saling memeriksa pekerjaan kalian. Jika jawabannya berbeda, coba cari apa yang kurang tepat dan cari solusinya.

Simak panduan berikut.

Mencari nilai perbandingan trigonometri 30° dan 60° :

1. Gambar sebuah segitiga sama sisi dengan panjang setiap sisinya 2 satuan. Beri variabel A, B, C untuk masing-masing sudutnya.
2. Belah segitiga tersebut menjadi dua bagian dengan garis vertikal di tengah-tengah bangunnya.
3. Gambar ulang satu bagian segitiganya dan tandai panjang sisi dan besaran sudut yang diketahui.
4. Cari panjang sisi yang belum diketahui menggunakan Teorema Pythagoras.
5. Cari nilai perbandingan sin, cos, dan tan untuk sudut istimewa 30° dan 60° .

Mencari nilai perbandingan trigonometri 45° :

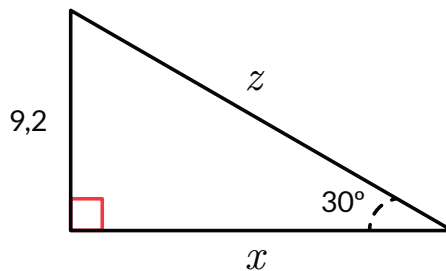
1. Gambar sebuah **segitiga siku-siku** sama kaki dengan panjang 1 satuan.
2. Cari panjang sisi miringnya menggunakan **Teorema Pythagoras**.
3. Cari nilai perbandingan $\sin$, $\cos$, dan $\tan$ untuk sudut istimewa 45° .

Latihan 3.6

1. Sebuah segitiga siku-siku memiliki dua sisi yang panjangnya 8 cm. Berapa panjang sisi miringnya?
2. Sebuah segitiga siku-siku mempunyai sudut 30° dan 60° .
 - a. Tuliskan panjang setiap sisi segitiganya yang memungkinkan.
 - b. Nia berkata segitiga ini memiliki panjang sisi seperti berikut: $5\sqrt{3}$ cm, 5 cm, dan 15 cm. Menurutmu, apakah panjang sisi yang dikemukakan Nia memungkinkan? Jelaskan mengapa.

Latihan 3.7

1. Cari panjang sisi x dan z .

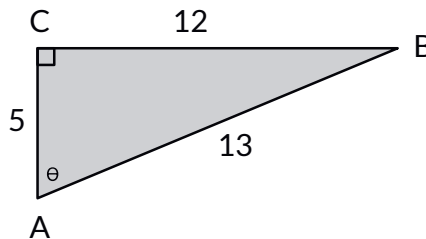


2. Segitiga ABC memiliki panjang sisi sebagai berikut.

Sisi AC = 5

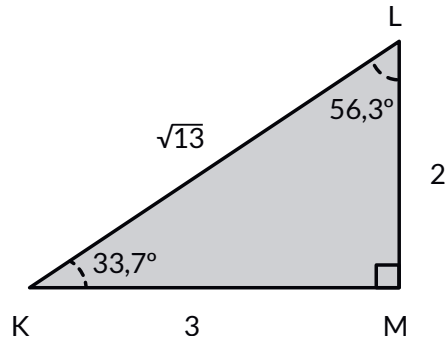
Sisi CB = 12

Sisi AB = 13



- a. Tentukan nama setiap sisi segitiga siku-siku berikut.
- b. Cari hasil $\sin \theta$.
- c. Cari hasil $\cos \theta$.

3. KLM adalah segitiga dengan besar sudut dan panjang seperti pada gambar di samping. KLM adalah segitiga dengan besar sudut dan panjang seperti pada gambar di samping.



- a. Tentukan hasil perbandingan trigonometri berdasarkan sudut yang ditentukan.

$\sin 56,3^\circ =$	$\sin 33,7^\circ =$
$\cos 56,3^\circ =$	$\cos 33,7^\circ =$

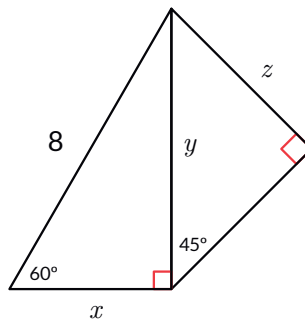
- b. Dua pasang nilai perbandingan trigonometri yang mana yang hasilnya sama? Mengapa demikian?



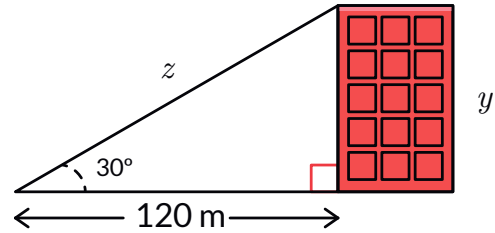
Ayo, Berpikir Kritis

Pada sudut istimewa perbandingan trigonometri $\sin 30^\circ$ dan $\cos 60^\circ$ bernilai sama. Temukan alasan mengapa ada pola seperti ini secara mandiri atau bersama-sama dengan teman sekelasmu.

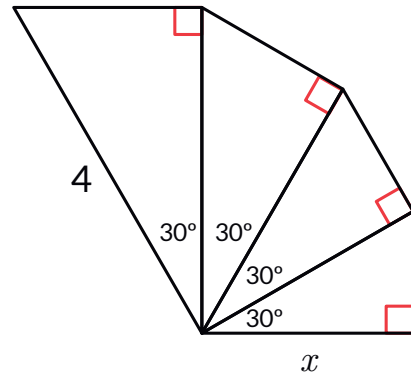
4. Cari panjang x , y , dan z !



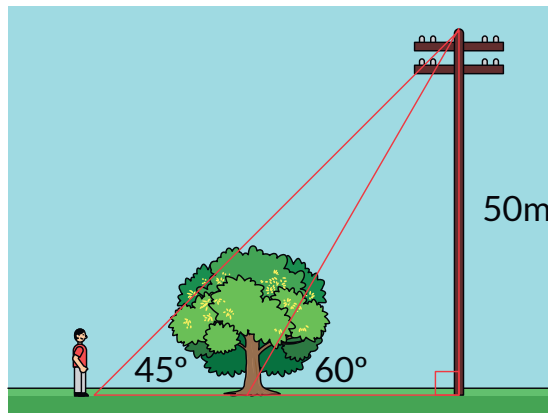
5. Dari jarak 120 m, seorang pengukur tanah menemukan sudut yang terbentuk antara garis permukaan dan puncak gedung adalah 30° . Gunakan perbandingan trigonometri untuk mencari tinggi gedung tersebut. Cari hasilnya dengan membulatkan ke satuan meter terdekat.



6. Terdapat susunan beberapa segitiga siku-siku seperti berikut.
- Desi berkata, ia perlu mencari $\sin 30^\circ$ untuk mencari panjang x . Apakah kamu setuju dengan Desi?
 - Cari panjang x .



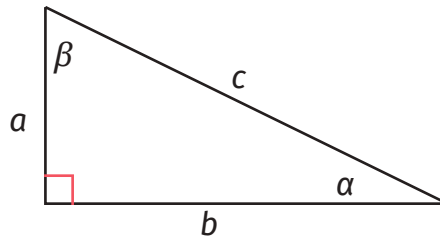
7. Gambar persegi panjang dengan panjang diagonal dua kali dari lebarnya. Tentukan sudut-sudut dalam segitiga siku-siku yang dibentuk oleh panjang, lebar, dan diagonal persegi panjang.
8. Seorang laki-laki sedang berjalan di sebuah area hijau. Ia berpapasan dengan sebatang pohon dan sebuah tiang listrik. Jika tinggi tiang 50 meter dengan sudut antara laki-laki dan puncak tiang 45° dan sudut antara pohon dengan puncak tiang 60° , berapa jarak antara seorang laki-laki tersebut dan pohon?





Tahukah Kamu?

Istilah co- dalam matematika berkaitan dengan komplemen sudut. Pada segitiga siku-siku dengan sudut α dan β berlaku $\alpha + \beta = 90^\circ$ sehingga β adalah komplemen dari sudut α .



Perbandingan-perbandingan trigonometri yang dibuat adalah sebagai berikut:

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \sin \beta$$

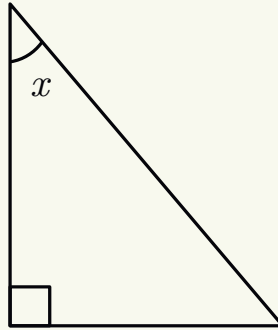
$$\csc \alpha = \frac{c}{a} = \sec \beta$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} = \tan \beta$$

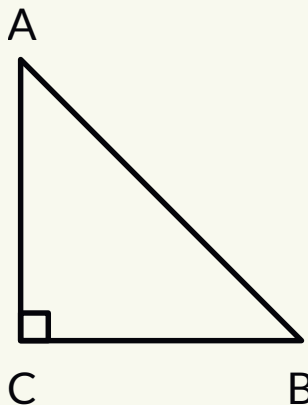
Dapatkan kamu melihat hubungan antara istilah co- dengan perbandingan trigonometri? Hal ini memudahkan kamu untuk menentukan perbandingan trigonometri jika salah satu sudut dalam segitiga siku-siku diketahui.

Uji Kompetensi

1. Jika $\cos x = \frac{20}{29}$, berapa nilai $\sin x$ dan $\tan x$?



2. Pilih salah satu gambar dari **Gambar 3.15** sebagai gambar soal. Selidikilah panjang bayangan di pagi hari dan siang hari. Bagaimana hubungan antara perubahan panjang bayangan, sudut, dan perbandingan trigonometri tangen?
3. Demi keamanan, tangga seharusnya diletakkan dengan sudut kemiringan 75° . Diketahui, tinggi satu lantai pada gedung berikut adalah 3,2 meter. Jika tangga perlu disediakan tepat di luar jendela lantai 3, berapakah panjang tangga yang diperlukan?
4. Tomi berkata bahwa sinus dari salah satu sudut lancip pada segitiga siku-siku selalu sama dengan cosinus dari sudut lancip lainnya. Dengan kata lain, $\cos B = \sin A$. Apakah pernyataan Tomi benar? Apa bukti dan penjelasannya?



5. Jelaskan bagaimana perbandingan trigonometri bermanfaat untuk (pilih salah satu):

- a. Mengukur tinggi tugu ikonik daerah di Indonesia seperti Jam Gadang, di Bukittinggi, Sumatra Barat. Kamu boleh membuat gambar untuk mendukung penjelasanmu.



Gambar 3.25 Jam Gadang
Sumber: Crisco 1492/commons.wikimedia.org (2017)

- b. Mengukur lebar sungai untuk pembangunan jembatan misalnya jembatan Youtefa di Papua. Kamu boleh membuat gambar untuk mendukung penjelasanmu.



Gambar 3.26 Jembatan Youtefa
Sumber: PUPR/commons.wikimedia.org (2019)

Asesmen Diri

Pertanyaan Asesmen Diri	Bisa mandiri	Bisa dengan bantuan	Belum bisa
1. Apakah saya sudah bisa mengidentifikasi nama setiap sisi segitiga siku-siku?			
2. Apakah saya sudah bisa menjelaskan cara mencari $\sin \theta$, $\cos \theta$, dan $\tan \theta$?			
3. Apakah saya sudah bisa menyelesaikan permasalahan matematika dengan menerapkan perbandingan trigonometri?			
4. Apakah saya sudah bisa menjelaskan manfaat perbandingan trigonometri dalam kehidupan sehari-hari?			

Pengayaan

Masih ingat nama gunung tertinggi di dunia yang disebutkan pada awal bab? Ya, Gunung Everest. Setelah mempelajari tentang trigonometri, apakah kamu dapat membayangkan cara manusia mengukur tinggi Gunung Everest?

Tonton video dengan memindai QR *codenya* dan lihat aksi nyata manfaat perbandingan trigonometri dalam menentukan tinggi Gunung Everest. Kamu bisa menyetel fungsi terjemah otomatis dari YouTube jika dirasa perlu.



<https://buku.kemdikbud.go.id/s/8fb2m2>

Refleksi

Ada tiga jenis perbandingan trigonometri yaitu sinus, cosinus, dan tangen. Masing-masing perbandingan dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan permasalahan sehari-hari mulai dari jarak landas pesawat sampai pada pengukuran objek yang tidak dapat secara fisik diukur ketinggiannya. Ada juga perbandingan trigonometri untuk sudut-sudut istimewa yang ditemukan pada segitiga siku-siku sama kaki dan segitiga sama sisi. Ayo refleksikan pembelajaranmu dengan menjawab pertanyaan berikut.

1. Apakah itu perbandingan trigonometri?
2. Apakah itu $\sin \theta$, $\cos \theta$, dan $\tan \theta$?
3. Apa manfaat perbandingan trigonometri? Berikan contoh dua kejadian dalam kehidupan nyata.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-558-7

Bab

4

Sistem Persamaan dan Pertidaksamaan Linear



Bagaimana menggunakan sistem persamaan/pertidaksamaan linear untuk menyelesaikan masalah?

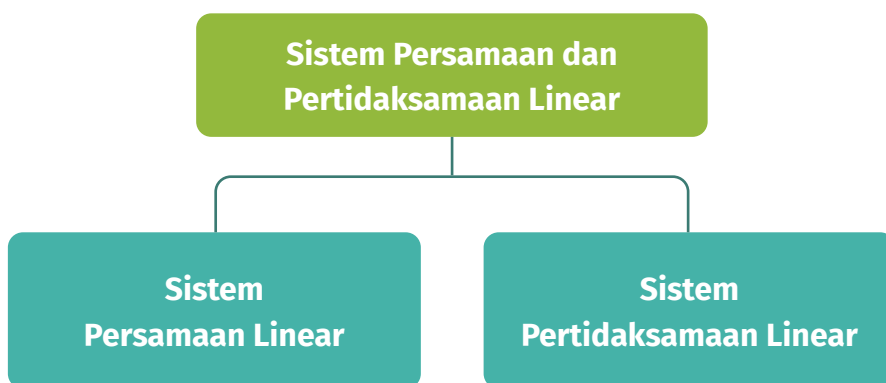
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kamu dapat memodelkan masalah ke dalam sistem persamaan linear dan pertidaksamaan linear serta menyelesaikannya.

Kata Kunci

- sistem persamaan linear
- sistem pertidaksamaan linear
- solusi/penyelesaian
- variabel

Peta Materi



Dalam kehidupan sehari-hari kamu pasti pernah menemui keadaan berikut.

1. Daftar menu terdiri atas berbagai paket. Di setiap paket, jenis makanan sama, namun berbeda-beda banyaknya. Apakah lebih ekonomis membeli paket makanan atau memesan setiap jenis makanan secara terpisah?
2. Seekor pemangsa mengejar mangsanya. Jika diketahui kecepatan dan posisi awal masing-masing, akankah pemangsa berhasil mengejar mangsanya?

3. Dalam produksi, ada biaya tetap (misalnya pembelian mesin, sewa tempat) dan ada biaya yang tergantung pada banyaknya benda yang diproduksi (misalnya bahan baku). Harga penjualan hanya tergantung pada banyaknya benda yang dijual. Setidaknya berapa banyak benda yang harus terjual supaya perusahaan tidak merugi?
4. Panitia karya wisata perlu menentukan jenis dan banyaknya kendaraan yang disewa. Kapasitas angkut setiap jenis kendaraan berbeda dan biaya sewanya pun berbeda-beda. Dengan memperhitungkan banyaknya siswa dan guru yang mengikuti karya wisata serta biaya yang dianggarkan, bagaimana panitia menentukan jenis dan banyaknya kendaraan yang disewa?
5. Seorang pedagang hendak membeli beberapa barang untuk dijual kembali. Modal dagang maupun kapasitas pengangkutnya terbatas. Jika diketahui harga dan berat masing-masing barang, bagaimana ia menentukan jenis barang yang dibelinya serta berapa banyak untuk tiap jenisnya?

Persoalan seperti pada contoh 1–5 adalah contoh persoalan yang dapat dijawab dengan menggunakan sistem persamaan linear atau sistem pertidaksamaan linear.

Sistem persamaan linear adalah gabungan beberapa persamaan linear. Penyelesaiannya adalah nilai yang memenuhi semua persamaan linear. Mirip dengan itu, sistem pertidaksamaan linear terdiri atas beberapa pertidaksamaan linear dan penyelesaiannya membuat semua pertidaksamaan linear bernilai benar.



Ayo, Mengingat Kembali

Di SMP kamu telah mempelajari sistem persamaan linear dengan dua variabel. Sistem persamaan linear adalah kumpulan beberapa persamaan linear yang saling terkait. Penyelesaian dari sistem persamaan linear adalah nilai-nilai yang memenuhi semua persamaan tersebut.

Selesaikan masalah berikut untuk melihat apakah kamu masih ingat tentang sistem persamaan linear dengan dua variabel.

Sebuah toko alat tulis menjual paket alat tulis. Paket A seharga Rp18.000,00 berisi lima buku tulis dan dua pensil. Paket B berisi sebuah buku tulis dan dua pensil dihargai Rp10.000,00. Berapakah harga masing-masing buku tulis dan pensil?

PROMO BESAR!

Paket	Isi	Harga
Paket A	5 Buku tulis 2 Pensil	Rp18.000,00
Paket B	1 Buku tulis 2 Pensil	Rp10.000,00

A. Sistem Persamaan Linear

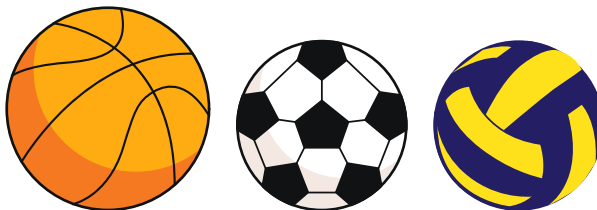
Setelah menguasai tentang sistem persamaan linear dengan dua variabel, mari mempelajari sistem persamaan linear dengan tiga variabel. Apa hal-hal yang sama dengan sistem persamaan linear dengan dua variabel? Apa saja perbedaannya?

Eksplorasi 4.1 Menimbang Bola yang Ada di Sekolah



Ayo, Bereksplorasi

Kinan menimbang bola yang ada di lemari sekolah. Pada penimbangan pertama, Kinan menimbang dua bola basket, sebuah bola kaki, dan tiga bola voli dan hasilnya 2.500 g. Penimbangan kedua, sebuah bola basket, dua buah bola kaki, dan dua buah bola voli beratnya 2.050 g. Penimbangan ketiga, dua buah bola basket dan sebuah bola voli beratnya 1.550 g. Berapa berat tiap jenis bola?



Gambar 4.1 Bola yang ada di lemari sekolah



Ayo, Berdiskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu: Bagaimana kamu menyelesaikan masalah ini?

1. Apakah di sekolahmu terdapat bola-bola yang sama dengan yang ada di sekolah Kinan? Jika ada, lakukan penimbangan seperti yang Kinan lakukan. Jika tidak ada, kamu dapat menggunakan bola/benda lain yang tersedia.

Bola/benda yang digunakan:

- bola basket diganti dengan _____
- bola kaki diganti dengan _____
- bola voli diganti dengan _____

2. Pilih variabel untuk menyatakan nilai yang akan dicari.

- a. x : berat bola basket
- b. y : berat bola _____
- c. z : berat bola _____

3. Setiap penimbangan menghasilkan sebuah persamaan linear. Tuliskan persamaan-persamaan linear yang kamu dapatkan.

- a. Penimbangan pertama: dua bola basket, sebuah bola kaki, dan tiga bola voli seberat 2.500 g (sesuaikan dengan bola/benda yang digunakan dan hasil penimbanganmu).

$$2x + y + 3z = 2.500 \text{ (1)}$$

- b. Penimbangan kedua: sebuah bola _____, dua bola _____, dan dua bola _____ seberat _____ (sesuaikan dengan bola/benda yang digunakan dan hasil penimbanganmu).

_____(2)

- c. Penimbangan ketiga: dua bola _____ dan sebuah bola _____ seberat _____.

_____ (3)



Petunjuk

berapa bola kaki yang ditimbang dalam penimbangan ketiga?

4. Gabungan persamaan linear (1), (2), dan (3) disebut sistem persamaan linear.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2500 \\ \hline \hline \end{cases}$$

5. Perhatikan bahwa persamaan (3) hanya memiliki variabel x dan z , tetapi sistem persamaan linear pada no. 4 tetaplah dianggap sebagai sistem persamaan linear dengan tiga variabel. Bagaimana mengubah persamaan (1) dan (2) menjadi sebuah persamaan linear dengan dua variabel (juga x dan z)? Persamaan yang dihasilkan:

_____ (4)

6. Persamaan (3) dan (4) menghasilkan sistem persamaan linear dengan dua variabel. Selesaikan.

$$x = \dots$$

$$z = \dots$$

7. Substitusi nilai x dan z ke dalam persamaan (1) atau (2) untuk mendapatkan nilai y .

$$y = \dots$$

8. Periksalah, apakah hasil perhitungannya sesuai dengan kenyataan. Timbanglah bola/benda satu per satu, dan tuliskan hasilnya pada tabel.

Nama Bola/ Benda	Berat (Hasil Perhitungan)	Berat (Hasil Penimbangan)	Kesesuaian dengan Hasil Perhitungan (Beri Tanda ✓)	
			Sesuai	Tidak Sesuai

9. Solusi/penyelesaian adalah nilai yang memenuhi semua persamaan. Benarkah solusi yang kamu dapatkan memenuhi semua persamaan awal?

10.



Ayo, Berpikir Kreatif

Apakah kamu dapat memikirkan cara yang berbeda untuk menyelesaikan permasalahan ini? Apakah hasilnya sama atau berbeda?

11.



Ayo, Berpikir Kritis

Mengapa Kinan melakukan tiga kali penimbangan? Apa yang terjadi jika penimbangan dilakukan dua kali? Bagaimana kalau lebih dari tiga kali?

12. Kamu telah mengenal metode eliminasi dan substitusi untuk menyelesaikan sistem persamaan linear dengan dua variabel. Pada langkah (5) kamu mengeliminasi variabel y untuk mendapatkan sistem persamaan linear dengan dua variabel.



Ayo, Berpikir Kritis

Mengapa variabel y yang dieliminasi?

13.



Ayo, Berpikir Kritis

Apakah sistem persamaan linear dapat diselesaikan dengan mengeliminasi variabel selain y ? Apa perbedaannya?

Perhatikan bahwa persamaan (3) tidak mengandung variabel y . Jika kamu mengeliminasi variabel y dari persamaan (1) dan (2) maka hasilnya dapat kamu gabungkan dengan persamaan (3) menghasilkan sistem persamaan linear dengan dua variabel (dan kamu dapat menyelesaikannya).

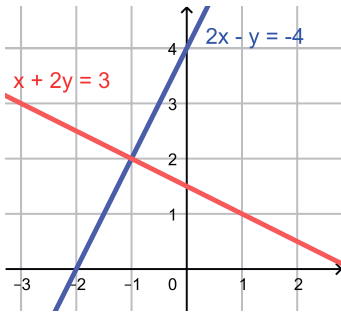
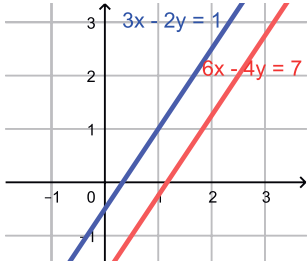
Ada berapa solusi yang dimiliki sistem persamaan linear?

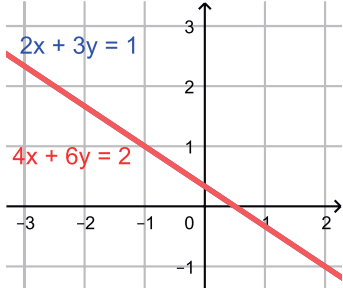
Dalam sistem persamaan linear dengan dua variabel, ada 3 kemungkinan banyaknya solusi:

- Sistem persamaan linear memiliki satu solusi. Grafiknya berupa dua garis yang berpotongan. Solusinya adalah titik potong kedua garis.
- Sistem persamaan linear tidak memiliki solusi. Grafiknya berupa dua garis yang sejajar.
- Sistem persamaan linear memiliki banyak solusi. Grafiknya berupa dua garis yang berimpit. Semua titik pada garis ini merupakan solusi.

Tabel 4.1 menunjukkan contoh sistem persamaan linear untuk setiap jenis solusi, dengan grafik masing-masing.

Tabel 4.1 Contoh Sistem Persamaan Linear dengan Banyaknya Solusi yang Berbeda-beda

No.	Sistem Persamaan Linear	Grafik	Titik Potong
1.	$\begin{cases} 2x - y = -4 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$		1 titik potong di (-1,2)
2.	$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x - 4y = 7 \end{cases}$		tidak ada titik potong

3.	$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4x + 6y = 2 \end{cases}$		banyak titik potong
----	--	---	---------------------

Pada sistem persamaan linear dengan tiga variabel, juga ada tiga kemungkinan banyaknya solusi.

Sistem persamaan linear dengan tiga variabel juga memiliki tiga kemungkinan banyaknya solusi. Untuk menggambarkan persamaan linear dengan tiga variabel dibutuhkan grafik tiga dimensi. Bagaimana cara mengidentifikasi banyaknya solusi tanpa menggambarkan grafiknya?

- Amati contoh sistem persamaan linear dengan dua variabel yang tidak memiliki solusi.

$$\begin{array}{rclclcl}
 3x & - & 2y & = & 1 & | \times 2 | & 6x & - & 4y & = & 2 \\
 6x & - & 4y & = & 5 & | \times 1 | & 6x & - & 4y & = & 5 \\
 \hline
 & & & & & & 0 & = & -3 & &
 \end{array}$$

Perhatikan bahwa setelah melakukan eliminasi, didapatkan sebuah **ketidaksamaan**, pernyataan $0 = -3$ **tidak pernah benar**, atau **tidak memiliki solusi**.

- Amati contoh sistem persamaan linear dengan dua variabel yang memiliki banyak solusi.

$$\begin{array}{rclclcl}
 2x & + & 3y & = & 1 & | \times 2 | & 4x & + & 6y & = & 2 \\
 4x & + & 6y & = & 2 & | \times 1 | & 4x & + & 6y & = & 2 \\
 \hline
 & & & & & & 0 & = & 0 & &
 \end{array}$$

Perhatikan bahwa setelah melakukan eliminasi, didapatkan sebuah kesamaan, pernyataan $0 = 0$ **selalu benar**, berapa pun nilai variabel-variabelnya, atau memiliki **banyak solusi**.

- Bedakan dengan sistem persamaan linear yang memiliki **satu solusi**. Hanya ada satu pasangan nilai yang menyebabkan persamaan linear bernilai benar.

$$\begin{array}{rcl}
 2x - y & = & -4 \quad | \times 2 | \quad 4x - 2y = -8 \\
 x + 2y & = & 3 \quad | \times 1 | \quad x + 2y = 3 \\
 \hline
 & & + \\
 & & 5x \qquad \qquad = -5 \\
 & & x \qquad \qquad = -1 \\
 & & y \qquad \qquad = 2
 \end{array}$$

Prinsip yang sama dapat diterapkan pada sistem persamaan linear dengan tiga (atau lebih) variabel. Lakukan eliminasi dan perhatikan apa yang kamu dapatkan. Tentukan banyaknya solusi berdasarkan hasil eliminasi.



Ayo, Bekerja Sama

Ayo kerjakan soal-soal berikut bersama teman-temanmu.

Latihan

4.1

1. Asep memiliki beberapa jenis tongkat untuk olahraga: tongkat kasti, tongkat hoki, dan tongkat bisbol. Asep menjajarkan 3 tongkat kasti, 2 tongkat hoki, dan 1 tongkat bisbol dan panjangnya 455 cm. Asep menjajarkan sebuah tongkat kasti, 3 tongkat ukuran hoki, dan 2 tongkat bisbol dan panjangnya 545 cm. Asep juga mengamati bahwa 2 tongkat kasti sama panjang dengan tongkat bisbol.
 - a. Tuliskan pengukuran pertama ke dalam persamaan matematika.
 - b. Tuliskan hasil pengukuran kedua dan ketiga ke dalam persamaan matematika juga untuk menghasilkan sistem persamaan.
 - c. Apakah sistem persamaan itu sebuah sistem persamaan linear? Bagaimana kamu tahu?
 - d. Selesaikan sistem persamaan tersebut.
 - e. Ada berapa solusi yang ada?
 - f. Berapakah panjang tiap jenis tongkat?

2. Sebuah minuman dijual dalam tiga kemasan berbeda: kecil, sedang, dan besar. Jika Bonar membeli 3 kemasan kecil, 2 kemasan sedang, dan 3 kemasan besar, dia mendapat minuman sebanyak 4.700 ml. Jika Bonar membeli 3 kemasan kecil, 1 kemasan sedang, dan 2 kemasan besar, dia mendapat 3.300 ml. Jika Bonar membeli 2 kemasan sedang dan 2 kemasan besar, dia mendapat 2.800 ml minuman. Berapakah volume tiap jenis kemasan?
 - a. Tuliskan sistem persamaan yang bersesuaian dengan permasalahan tersebut.
 - b. Apakah sistem persamaan itu termasuk sistem persamaan linear? Tuliskan alasannya.
 - c. Selesaikan sistem persamaan tersebut.
 - d. Ada berapa solusi yang ada? Jelaskan.
 - e. Apa artinya bagi Bonar jika sistem persamaan linear ini memiliki banyak solusi?
3. Bu Wati membeli tiga jenis buah. Kalau ia membeli 3 kg jeruk, 3 kg pepaya, dan 1 kg salak, ia harus membayar Rp130.000,00. Jika Bu Wati membeli 2 kg jeruk, 2 kg pepaya, dan 1 kg salak, ia harus membayar Rp100.000,00. Jika Bu Wati mau membeli 1 kg jeruk dan 1 kg pepaya, ia harus membayar Rp50.000,00. Berapakah harga tiap kg setiap jenis buah?
 - a. Tuliskan sistem persamaan yang bersesuaian dengan permasalahan tersebut.
 - b. Apakah sistem persamaan itu termasuk sistem persamaan linear? Tuliskan alasannya.
 - c. Selesaikan sistem persamaan tersebut.
 - d. Ada berapa solusi yang ada? Jelaskan.
 - e. Apa artinya bagi Bu Wati jika sistem persamaan linear ini tidak memiliki solusi?
4. Untuk setiap model matematika berikut, tentukan apakah model matematika tersebut merupakan sistem persamaan linear atau bukan. Jelaskan.



Ayo, Berpikir Kritis

$$\text{a. } \begin{cases} 3x - 5y + z = 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 8 \end{cases}$$

$$\text{c. } \begin{cases} 15x - 23y + 2z = 200 \\ 31x + 42y - \frac{1}{z} = 150 \\ 23x - 45y - 33z = 100 \end{cases}$$

$$\text{b. } \begin{cases} 5x - 3y + 2z = 20 \\ 3x + 4y - z = 15 \\ 2x - 5y - 3z = 10 \end{cases}$$

$$\text{d. } \begin{cases} x - 3y + 2z = 20 \\ 2x + y - 3z = 15 \\ 3x - 2y - z = 35 \end{cases}$$

5. Pak Musa memiliki toko beras dan menjual campuran beras. Campuran 2 kg beras A, 2 kg beras B, dan 1 kg beras C dihargai Rp50.000,00. Campuran 4 kg beras A, 2 kg beras B, dan 3 kg beras C dihargai Rp91.000,00. Campuran 4 kg beras A, 4 kg beras B, dan 2 kg beras C dihargai Rp95.000,00. Tentukan harga tiap kg beras A, beras B, dan beras C.
- Tuliskan model matematikanya.
 - Apakah model matematika itu merupakan sistem persamaan linear?
 - Ada berapa solusi yang dimiliki oleh sistem ini? Bagaimana kamu tahu?



Ayo, Berefleksi

Apakah kamu menjawab ya untuk semua pertanyaan berikut? Jika ada pertanyaan yang kamu jawab tidak, apa yang perlu kamu lakukan?

	Bisa	Perlu Bantuan	Belum Bisa
1. Saya bisa memodelkan masalah ke dalam sistem persamaan linear.			
2. Saya bisa menyelesaikan sistem persamaan linear.			
3. Saya bisa mengenali sistem persamaan linear yang tidak mempunyai solusi.			
4. Saya bisa mengenali sistem persamaan linear yang mempunyai banyak solusi.			

B. Sistem Pertidaksamaan Linear

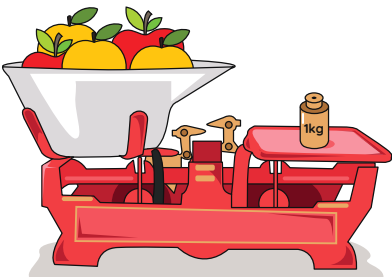
Selain ada istilah persamaan, dikenal juga istilah pertidaksamaan. Demikian juga selain ada sistem persamaan linear, ada juga sistem pertidaksamaan linear. Bagaimana kaitannya?

Eksplorasi 4.2 Menimbang Buah



Ayo, Bereksplorasi

Pak Eko menimbang buah menggunakan timbangan bebek. Dua buah apel dan lima buah jeruk beratnya kurang dari 1 kg. Enam buah apel dan dua buah jeruk beratnya lebih dari 1 kg. Jika dianggap setiap apel beratnya sama dan setiap jeruk beratnya sama, berapakah berat setiap apel? Berapakah berat setiap jeruk?



Gambar 4.2 Timbangan Bebek

1. Cobalah mengerjakan soal ini dengan metode coba dan perbaiki.

Berat 1 Apel	Berat 1 Jeruk	Berat 2 Apel dan 5 Jeruk	Berat 6 Apel dan 2 Jeruk



Ayo, Berpikir Kritis

Strategi apa lagi yang dapat kamu coba?

2. Apakah yang telah kamu pelajari tentang sistem persamaan linear dapat membantumu menyelesaikan masalah ini?

Permasalahan yang dihadapi oleh Pak Eko dapat dituliskan model matematikanya.

1. Tentukan variabelnya. Pikirkan: apa yang diketahui? Apa yang ditanya?
Untuk soal ini berat 1 apel (misal disebut x) dan berat 1 jeruk (misal disebut y)

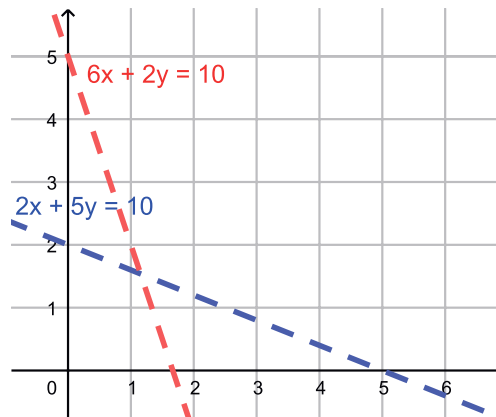
2. Model matematikanya (dalam satuan ons, 1 kg = 10 ons):

$$\begin{cases} 2x + 5y < 10 \\ 6x + 2y > 10 \end{cases}$$

3. Model matematika ini mengingatkan kita pada sistem persamaan linear

$$\begin{cases} 2x + 5y = 10 \\ 6x + 2y = 10 \end{cases}$$

4. Grafik sistem persamaan linear ini



Ayo, Berpikir Kritis

- a. Apakah titik $(0,0)$ merupakan daerah hasil pertidaksamaan $2x + 5y < 10$? Petunjuk: substitusi nilai $x = 0$ dan $y = 0$ ke dalam pertidaksamaan dan periksalah apakah pertidaksamaan bernilai benar.
- b. Apakah titik $(0,0)$ merupakan daerah hasil pertidaksamaan $6x + 2y > 10$? Petunjuk: substitusi nilai $x = 0$ dan $y = 0$ ke dalam pertidaksamaan dan periksalah apakah pertidaksamaan bernilai benar.



Ayo, Bereksplorasi



Gambar 4.3 Lomba Balap Karung

Kiki adalah panitia perayaan hari kemerdekaan di RT. Dari kas RT ada uang sebesar Rp500.000,00 yang dapat digunakan. Untuk penyelenggaraan perlombaan, dibutuhkan Rp20.000,00 per anak. Hadiah untuk pemenang dianggarkan Rp40.000,00 untuk setiap jenis perlombaan. Diharapkan ada lebih dari 13 anak yang berpartisipasi. Tentukan apa saja kemungkinannya.



Ayo, Berdiskusi

Diskusikan dengan teman-temanmu: Bagaimana kamu menyelesaikan masalah ini?

1. Salah satu strategi yang dapat kamu gunakan adalah tebak dan perbaiki. Tebak, hitung nilainya. Jika tidak memenuhi syarat, perbaiki tebakanmu.

Banyaknya Perlombaan	Biaya Hadiah	Banyaknya Anak	Biaya Penyelenggaraan	Biaya Total

2. Tuliskan strategi lain yang kamu coba.



Ayo, Berpikir Kritis

Apakah strategi yang berbeda menghasilkan jawaban yang sama? Mengapa?

3. Apakah yang telah kamu pelajari tentang sistem persamaan linear dapat membantumu menyelesaikan masalah ini?

Alternatif Penyelesaian

Masalah yang dihadapi Kiki dapat diselesaikan dengan sistem pertidaksamaan linear.

1. Tentukan model matematikanya. Jika x menyatakan banyaknya peserta dan y menyatakan banyaknya perlombaan maka model matematikanya adalah:

$$\begin{cases} 20x + 40y \leq 500 \\ x > 13 \end{cases}$$

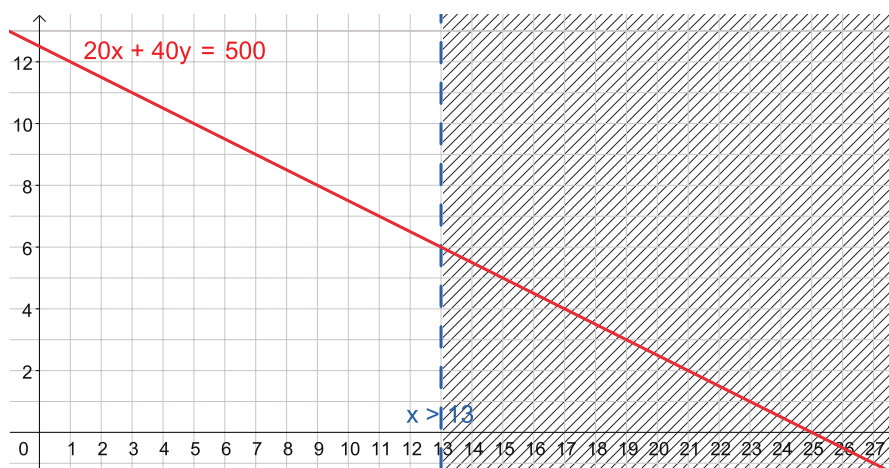
Ini adalah sebuah sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel

2. Kalian telah belajar menyelesaikan sistem persamaan linear. Pengetahuan ini dapat dimanfaatkan untuk menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear.
- a. Gambarkan grafik sistem persamaan linear yang berpadanan, yaitu sistem persamaan linear yang didapat dengan mengubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda persamaan.

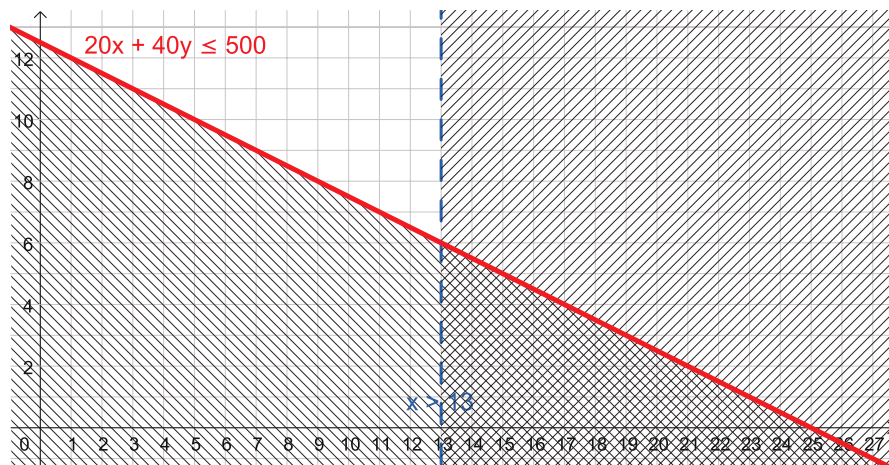
$$\begin{cases} 20x + 40y = 500 \\ x = 13 \end{cases}$$

- b. Perlu dicatat bahwa garis yang didapat dari pertidaksamaan **lebih atau sama dengan** dan kurang atau sama dengan digambarkan dengan garis utuh (artinya garis tersebut termasuk daerah jawaban) sedangkan garis yang didapat dari pertidaksamaan **lebih dari** atau **kurang dari** digambarkan dengan garis putus-putus (artinya garis tersebut hanya batas, tidak termasuk daerah jawaban).
- c. Pilih sebuah titik, misalnya (0,0), lalu substitusikan ke dalam pertidaksamaan. Jika nilainya memenuhi ketidaksamaan maka

daerah yang memuat $(0,0)$ diarsir untuk menunjukkan bahwa daerah inilah yang merupakan daerah hasil. Garis persamaan linear menjadi pembatas antara daerah jawab dan bukan daerah jawab.



- d. Lakukan hal yang sama untuk pertidaksamaan yang lain.
- e. Solusinya adalah daerah yang merupakan irisan semua daerah jawab.



- f. Tentukan makna solusi ini dalam masalah awal.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan GeoGebra untuk menggambarkan grafik sistem pertidaksamaan linear ini. Bandingkan hasilnya dengan grafik yang kamu buat.

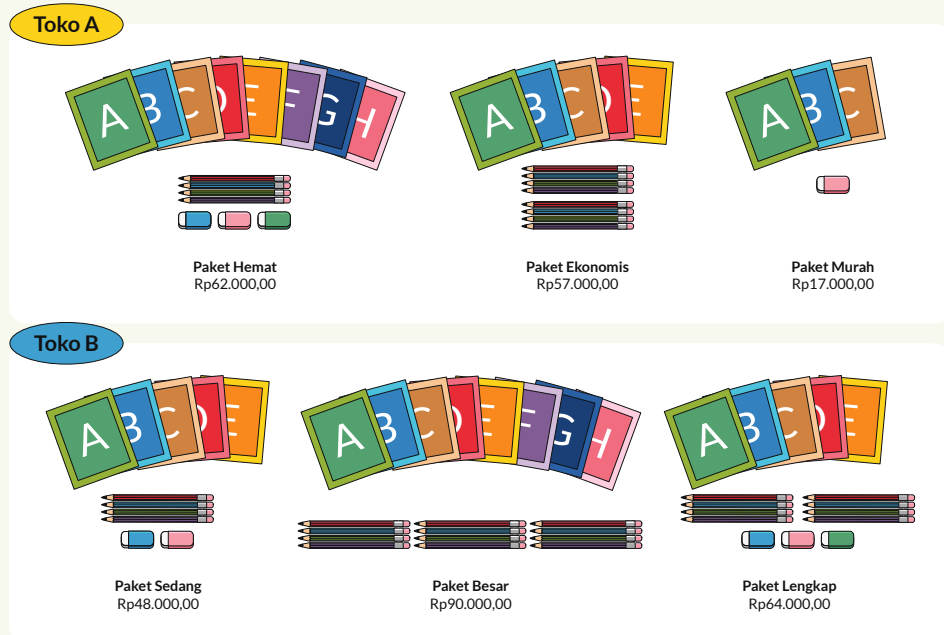


1. Bonar memiliki dua pekerjaan paruh waktu. Untuk mengantar barang, Bonar dibayar Rp15.000,00 per jam. Untuk pekerjaan mencuci piring di restoran, Bonar dibayar Rp9.000,00 per jam. Dia tidak dapat bekerja lebih dari 10 jam. Bonar membutuhkan uang sebesar Rp120.000,00. Berapa jam dia harus bekerja untuk masing-masing pekerjaan?
 - a. Tuliskan model matematikanya.
 - b. Apakah model matematika tersebut merupakan sistem pertidaksamaan linear?
 - c. Gambarkan grafiknya.
 - d. Tentukan koordinat titik-titik potongnya.
 - e. Tentukan daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan linear.
 - f. Apakah Bonar bisa mendapatkan uang yang dia butuhkan dengan bekerja mengantar barang selama 4 jam?
 - g. Apakah Bonar bisa mendapatkan uang yang dibutuhkan jika bekerja selama 9 jam?
2. Nova membeli pupuk dan tanaman untuk kebunnya. Nova memiliki uang sebesar Rp100.000,00. Setiap kantong pupuk harganya Rp20.000,00 dan setiap tanaman harganya Rp10.000,00. Nova ingin membeli setidaknya 5 tanaman. Berapa banyak tanaman dan pupuk yang dapat Nova beli?
3. Bu Dini membutuhkan telur ayam dan telur puyuh. Telur ayam harganya Rp22.000,00 per kg dan telur puyuh harganya Rp30.000,00 per kg. Bu Dini memiliki uang sebesar Rp150.000,00. Karena khawatir telurnya pecah di perjalanan, Bu Dini tidak mau membawa lebih dari 6 kg telur. Apakah Bu Dini dapat membeli 6 kg telur?
4. Sebuah UMKM memproduksi dua jenis sabun cair, yaitu sabun mandi dan sabun cuci tangan. Untuk setiap liter sabun mandi, dibutuhkan biaya produksi Rp15.000,00 per liter. Biaya produksi sabun cuci tangan Rp10.000,00 per liter. Selain itu, pabrik juga harus mengeluarkan biaya tetap sebesar Rp500.000,00. UMKM tersebut memiliki modal sebesar Rp2.500.000,00. Gudang yang ada dapat menampung 150 liter sabun cair.

Sabun mandi dijual seharga Rp25.000,00 per liter dan sabun cuci tangan Rp20.000,00 per liter. Apakah mereka bisa mendapatkan keuntungan dengan harga tersebut? Berikan contoh banyaknya sabun mandi dan sabun cuci masing-masing yang dijual sehingga pendapatan mereka lebih dari pengeluaran.

Uji Kompetensi

1. Bu Sri bertugas untuk menyiapkan hadiah untuk siswa berprestasi di sekolah. Bu Sri telah menetapkan bahwa hadiah berupa alat tulis (buku tulis, pena, dan penghapus). Bu Sri mengunjungi dua toko alat tulis dan mendapati alat tulis dijual dalam bentuk paket sebagai berikut.



Berdasarkan harga tiap paket yang tersedia di toko A dan toko B, hitunglah harga dari setiap alat tulis di masing-masing toko (buku tulis, pena, dan penghapus) dan jawablah pertanyaan berikut.

- a. Manakah yang lebih mahal: harga sebuah buku tulis di toko A atau di toko B?
- b. Manakah yang lebih mahal: harga sebuah penghapus di toko A atau di toko B?
- c. Manakah yang lebih mahal: harga sebuah pena di toko A atau di toko B?

2. Pak Budi memiliki uang sebanyak Rp100.000.000,00. Ia ingin mendepositokan uangnya. Bank A memberikan bunga sebesar 4% dan bank B memberikan bunga sebesar 6%. Pak Budi ingin mendapatkan bunga setidaknya Rp550.000,00 namun ia tidak ingin mendepositokan uangnya pada satu bank saja. Apakah hal itu mungkin? Jika ya, sebutkan salah satu kemungkinannya.
3. Maria adalah penjaga tiket di sirkus. Ada tiga jenis tiket yang dijual. Keluarga Andi membeli 4 tiket anak-anak, 2 tiket dewasa, dan 1 tiket lansia dan membayar Rp640.000,00. Keluarga Butet membeli 1 tiket anak-anak, 3 tiket dewasa, dan 2 tiket lansia dan membayar Rp550.000,00. Keluarga Danu membeli 3 tiket anak-anak, 1 tiket dewasa, dan 1 tiket lansia dan membayar Rp450.000,00. Berapakah harga setiap jenis tiket yang dijual Maria?
4. Butet ingin membeli buah. Semua buah yang ada sudah dikemas menjadi paket. Paket A terdiri atas 5 jeruk, 1 mangga, dan 8 salak beratnya 1,5 kg. Paket B terdiri atas 10 jeruk, 2 mangga, dan 4 salak beratnya 2 kg. Paket C terdiri atas 3 mangga, dan 12 salak beratnya 2 kg. Jika setiap jenis buah itu identik, berapakah berat masing-masing jenis buah?
5. Siswa kelas 10 akan melakukan studi lapangan. Mereka perlu menyewa bus selama satu hari. Ada 168 siswa dan 12 guru yang akan mengikuti studi lapangan. Berikut tabel harga sewa bus berdasarkan ukurannya. Anggaran yang tersedia sebesar Rp11.000.000,00.

Ukuran	Kapasitas	Tarif per hari
Bus besar	50	Rp2.520.000,00
Bus kecil	18	Rp1.600.000,00

Tentukan semua kemungkinan kendaraan yang mereka sewa (jenis dan banyak kendaraan yang mereka sewa).

6. Selesaikan sistem persamaan linear berikut

$$\begin{cases} 25x - 15y + 10z = 100 \\ 32x + 16y - 12z = 240 \\ -21x + 7y + 14z = 140 \end{cases}$$

7. Gambarkan daerah hasil dari sistem pertidaksamaan linear berikut

$$\begin{cases} 3x + y < 10 \\ x - 2y \geq 5 \end{cases}$$

Pengayaan

Kamu akan bermain dengan bidang koordinat.

Peserta: dua orang siswa

Alat dan bahan: kertas berpetak atau jika tersedia, kamu juga dapat menggunakan aplikasi Graphing Calculator seperti GeoGebra atau Desmos.

Tujuan: Menentukan sistem pertidaksamaan linear yang daerah hasilnya memuat titik target, tetapi tidak memuat dua titik lainnya.

Langkah-langkah:

1. Pemain pertama menentukan sebuah titik target (sebut titik K) pada bidang koordinat.
2. Pemain kedua menentukan dua titik lain (sebut titik P dan Q) pada bidang koordinat.
3. Pemain pertama menentukan sebuah pertidaksamaan (yang memuat titik K, tetapi tidak memuat titik P maupun titik Q).
4. Pemain kedua menentukan pertidaksamaan lain (yang memuat titik K, tetapi tidak memuat titik P maupun titik Q).
5. Demikian bergantian sampai titik K berada di dalam daerah yang tertutup.
6. Apakah kamu bisa mendapatkan daerah yang memenuhi syarat tersebut dengan lebih sedikit garis?
 - a. Jika bisa, buatlah daerah tersebut.
 - b. Jika tidak bisa, apa alasanmu untuk yakin bahwa ini adalah yang paling sedikit?
7. Ulangi untuk titik K, P, dan Q yang berbeda.

Refleksi

Pertanyaan Asesmen Diri	Bisa	Perlu Bantuan	Belum Bisa
1. Saya bisa mengenali masalah yang dapat diselesaikan dengan sistem pertidaksamaan linear.			
2. Saya bisa memodelkan masalah menjadi sistem pertidaksamaan linear.			
3. Saya bisa menyelesaikan sistem pertidaksamaan linear.			
4. Saya bisa membedakan masalah yang bisa diselesaikan dengan sistem persamaan linear dengan masalah yang bisa diselesaikan dengan sistem pertidaksamaan linear.			
5. Saya bisa menggambarkan grafik yang menunjukkan sistem pertidaksamaan linear.			

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-558-7

Bab

5

Persamaan dan Fungsi Kuadrat



Bagaimana menggunakan persamaan dan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari?

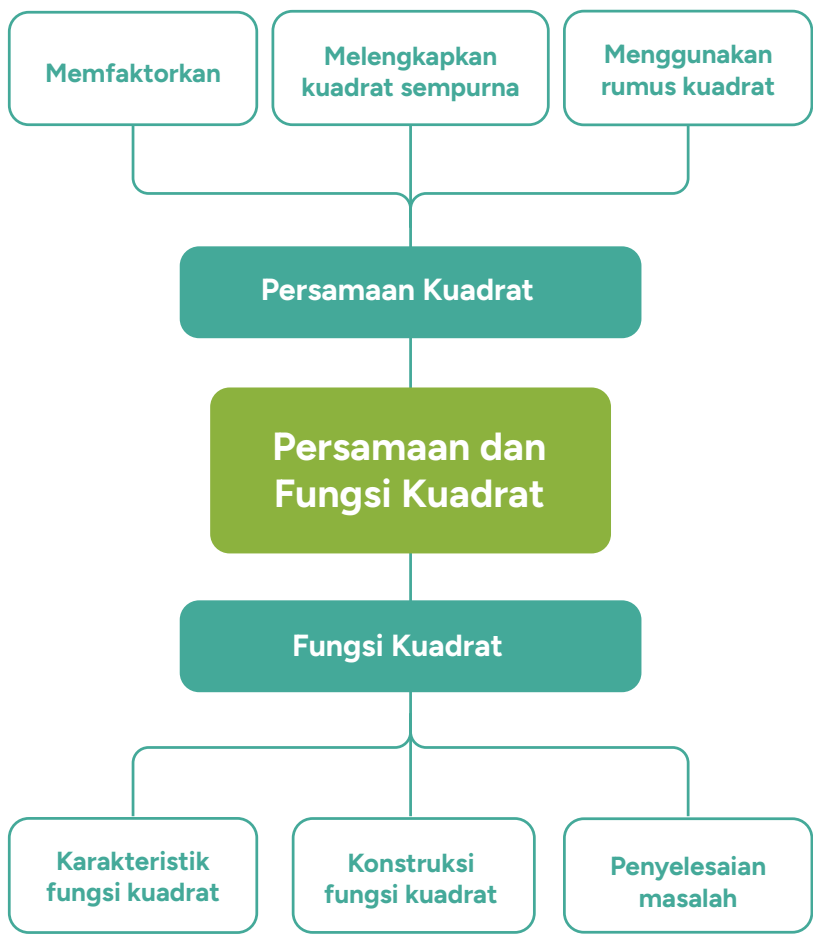
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kamu dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan persamaan kuadrat dalam kehidupan sehari-hari dan menggunakan fungsi kuadrat untuk menyelesaikan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

Kata Kunci

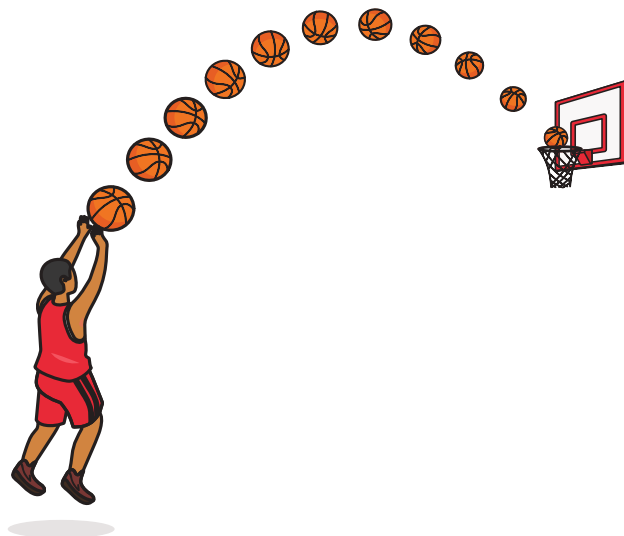
- persamaan kuadrat
- akar-akar persamaan kuadrat
- variabel
- fungsi kuadrat
- diskriminan

Peta Materi



Persamaan kuadrat dan fungsi kuadrat digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Contoh sederhana dari penerapan persamaan kuadrat adalah menentukan sisi sebuah persegi jika diketahui luasnya, yaitu $x^2 = 16$. Contoh lainnya adalah menentukan waktu yang diperlukan oleh bola kaki agar tiba di tanah, setelah ditendang. Masyarakat Babilonia diyakini sudah menggunakan persamaan kuadrat. Contohnya adalah mereka menggunakannya untuk menentukan dua bilangan positif yang hasil penjumlahan dan perkalian kedua bilangan tersebut diketahui. Mereka juga menghubungkan pemahaman luas sebuah persegi dengan persegi panjang dengan mencari solusi persamaan kuadrat.

Bagaimana dengan fungsi kuadrat? Contoh penerapan fungsi kuadrat adalah menentukan hubungan biaya yang diperlukan dengan pendapatan dari penjualan sejumlah produksi tertentu. Fungsi kuadrat juga ditemukan dalam perumusan lintasan parabola yang dilalui oleh sebuah bola basket.



Gambar 5.1 Lintasan Bola Basket



Ayo, Mengingat Kembali

Di SMP, kamu telah mempelajari fungsi dan persamaan linear. Kamu tentu bisa membedakan kedua hal ini. Contohnya adalah pembayaran tagihan listrik berdasarkan pemakaian energi listrik dalam satuan kWh, dengan biaya per kWh berbeda untuk golongan listrik yang berbeda. Jika biaya sebesar Rp1.467,28 per kWh untuk batas daya 1300 VA maka fungsi biaya sebagai jumlah kWh yang digunakan menjadi $B(x) = 1.467,28x + 75.124$ dengan x merupakan jumlah

kWh dan 75.124 merupakan biaya awal. Jika 1.467, $28x + 75.124 = 100.000$, maka dapat ditentukan jumlah kWh yang memenuhi persamaan tersebut.

Kamu juga telah mempelajari faktorisasi dan sifat distributif untuk menyelesaikan soal-soal matematika. Contoh penggunaan sifat distributif adalah $2(x + 5) = 2x + 10$ dan $15x + 10 = 5(3x + 2)$. Faktorisasi dan sifat distributif digunakan dalam penyelesaian persamaan kuadrat.

Coba kamu kerjakan soal-soal di bawah ini.

1. Lima baju serupa berharga Rp420.000. Berapa harga tujuh baju?
Jika uang kamu sebesar Rp1.008.000, berapa baju yang kamu peroleh?
2. Jabarkan $4(2x - 6)$.
3. Faktorkan $14x + 36$.

A. Persamaan Kuadrat

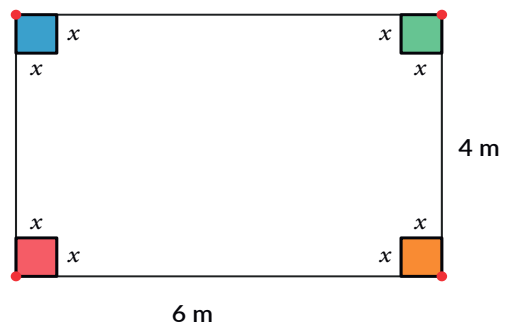
Lakukan kegiatan eksplorasi berikut untuk memahami bagaimana merumuskan suatu masalah dalam bentuk persamaan kuadrat.

Eksplorasi 5.1 Perumusan Masalah dalam Bentuk Persamaan Kuadrat



Ayo, Bereksplorasi

1. Empat sudut baca berukuran sama dibuat dalam sebuah ruang kelas berukuran 4 m x 6 m (lihat **Gambar 5.2**). Tentukan luas kelas yang tersisa untuk mengatur susunan tempat duduk para siswa.



Gambar 5.2 Empat Sudut Ruang Baca dalam Kelas

2. Perkalian dua bilangan adalah 63. Penjumlahannya adalah 16. Tunjukkan persamaan matematika yang dibuat untuk menyelesaikan masalah ini.
3. Sebuah kendaraan menempuh jarak sejauh 320 km dengan kelajuan tertentu dalam waktu tertentu. Jika kendaraan melaju lebih cepat 24 km/jam daripada biasanya, maka waktu tempuhnya berkurang tiga jam untuk menempuh jarak yang sama. Berapa kelajuan mula-mula? Tunjukkan persamaan matematika yang dibuat untuk menyelesaikan masalah ini.

Persamaan kuadrat merupakan suatu persamaan matematika yang melibatkan bentuk kuadrat.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dengan a , b , dan c merupakan bilangan real dan $a \neq 0$. Persamaan kuadrat tetap berlaku jika b atau c atau keduanya sama dengan nol. Persamaan kuadrat merupakan suatu polinom dengan pangkat tertinggi adalah 2. Suatu persamaan polinom dinyatakan sebagai berikut.

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

dengan a merupakan suatu bilangan yang disebut sebagai koefisien dan $n > 0$ (n adalah bilangan asli) merupakan pangkat tertinggi dari polinom.

Istilah kuadrat berasal dari kata bahasa Latin, yaitu *quadratus*, yang berarti membuat persegi.



Ayo, Berpikir Kritis

Apakah bentuk-bentuk di bawah ini merupakan persamaan kuadrat?

1. $\frac{1}{x} + 2x + 4 = 0$
2. $\frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-3} = x^2 - 4$

Penyelesaian persamaan kuadrat dapat menghasilkan dua solusi. Jenis solusi yang dihasilkan oleh persamaan kuadrat akan dibahas lebih mendalam. Solusi persamaan kuadrat disebut juga sebagai akar-akar persamaan kuadrat.



Ayo, Berdiskusi

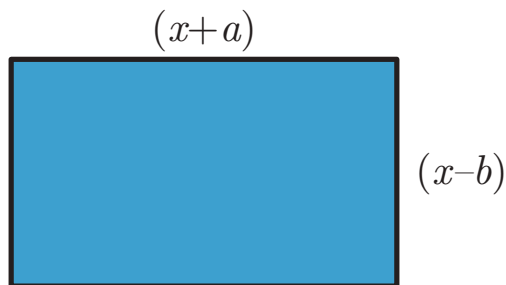
Berikan dua contoh soal yang dapat dinyatakan dalam persamaan kuadrat.

Latihan 5.1

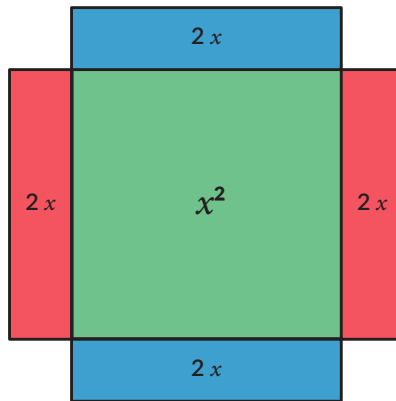


Ayo, Mencoba

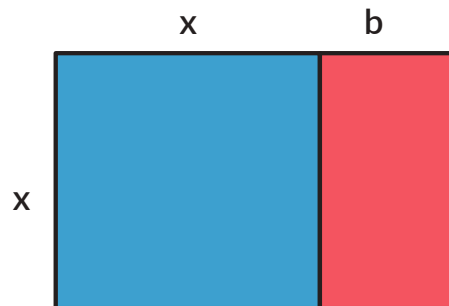
1. Tentukan apakah persamaan-persamaan matematika di bawah ini merupakan persamaan kuadrat.
 - a. $x^3 + x^2 + x = 0$
 - b. $3x^2 + 2x - 1 = 0$
 - c. $\frac{1}{x} + 5x = 0$
 - d. $x^2 + \frac{1}{x} + 3 = 0$
2. Jabarkan
 - a. $(x + 2)(x + 3) = 0$
 - b. $(\frac{1}{3}x - 4)(x + 9) = 0$
 - c. $(2x - 8)(x + 5) = 0$
3. Jabarkan luas persegi panjang di bawah ini.



4. Luas bangun datar di bawah ini adalah 20 m^2 . Bangun datar tersebut terdiri atas satu persegi dan empat persegi panjang yang sama besar.



- a. Nyatakan luas bangun datar yang merupakan gabungan persegi dan empat persegi panjang yang sama besar tersebut dalam bentuk persamaan kuadrat.
 - b. Jika bangun datar tersebut dibuat berbentuk persegi maka tentukan tambahan luas yang diperlukan oleh bangun datar di atas. Nyatakan juga luas persegi yang dibuat dalam bentuk persamaan kuadrat.
5. Perhatikan gambar sebuah bangun datar di samping ini. Luas bangun datar adalah 150 m^2 . Nyatakan luas bangun datar dalam persamaan kuadrat.



1. Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Faktorisasi

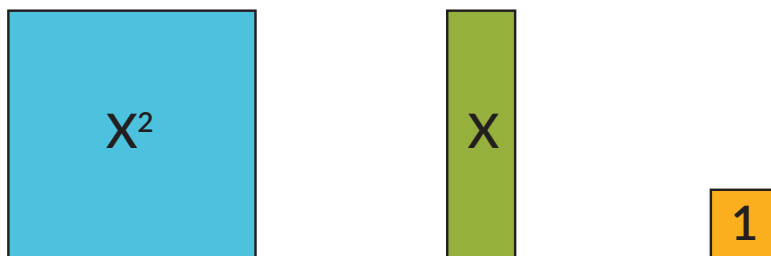
Eksplorasi 5.2 Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Ubin Aljabar (Faktorisasi)



Ayo, Bereksplorasi

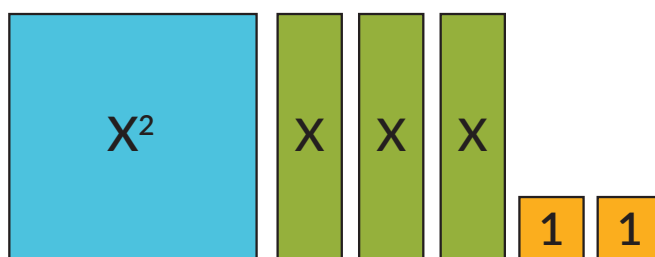
Ubin aljabar dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat. Ubin aljabar terdiri atas ubin bernilai $x^2 (x \times x)$, ubin bernilai $x (x \times 1)$, dan ubin bernilai $1 (1 \times 1)$. Penyelesaian dengan ubin aljabar menggunakan

pendekatan perkalian sebagai luas bangun datar yang berupa persegi atau persegi panjang. Perhatikan **Gambar 5.3**



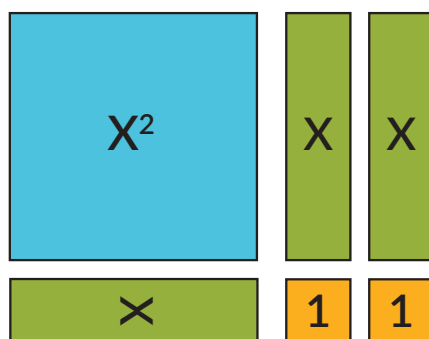
Gambar 5.3 Ubin-Ubin Aljabar

Cari solusi atau akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + 3x + 2 = 0$ dengan menggunakan ubin aljabar.



Gambar 5.4 Ubin-Ubin Aljabar untuk $x^2 + 3x + 2 = 0$

Susunlah ubin-ubin aljabar sehingga terbentuk persegi atau persegi panjang.



Gambar 5.5 Penyusunan Ubin-Ubin Aljabar

Berdasarkan **Gambar 5.5** jelaslah bahwa persamaan kuadrat $x^2 + 3x + 2 = 0$ dapat dinyatakan dalam $(x + 1)(x + 2) = 0$ sehingga

akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2 + 3x + 2 = 0$ adalah $x = -2$ dan $x = -1$.

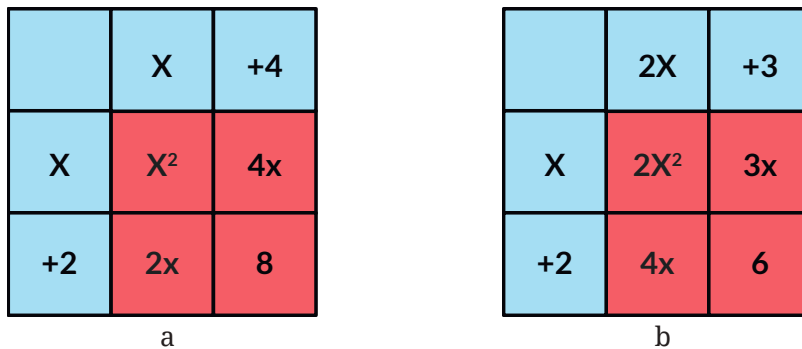
Bentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ menjadi $a(x - x_1)(x - x_2)$ jika dilakukan faktorisasi dengan x_1 dan x_2 merupakan dua solusi persamaan kuadrat atau akar-akar persamaan kuadrat.

Penggunaan ubin aljabar menolong pemahaman dalam menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara faktorisasi.

Kerjakan tugas di bawah ini secara berpasangan.

1. Selesaikan persamaan kuadrat $x^2 + 6x + 5 = 0$ dengan menggunakan ubin aljabar.
2. Selesaikan persamaan kuadrat $2x^2 + 5x + 2 = 0$ dengan menggunakan ubin aljabar.

Perhatikan diagram di bawah ini untuk memahami peran koefisien dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Bentuk kuadrat $x^2 + 6x + 8$ merupakan hasil perkalian dari $(x + 2)(x + 4)$. Bentuk kuadrat $2x^2 + 7x + 6$ merupakan hasil perkalian dari $(2x + 3)(x + 2)$.



Gambar 5.6 Diagram Bentuk Kuadrat

Berdasarkan **Gambar 5.6a**, nilai c sebesar 8 merupakan hasil perkalian dari 4 dan 2 sedangkan nilai b sebesar 6 merupakan hasil penjumlahan 4 dan 2. Berdasarkan **Gambar 5.6b**, nilai c sebesar 6 merupakan hasil perkalian dari 3 dan 2 sedangkan nilai b sebesar 7 merupakan hasil penjumlahan dari (2×2) dan (1×3) . Pemfaktoran dari 2 adalah 1 dan 2 sedangkan pemfaktoran dari 3 adalah 1 dan 3. Coba kamu pikirkan jika salah satu atau kedua koefisien bernilai negatif, bagaimana hubungannya dengan pemfaktoran persamaan kuadrat.

Nilai koefisien c dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ menentukan faktorisasi. Jika $a = 1$ maka nilai b merupakan penjumlahan kedua faktor. Jika $a \neq 1$ maka gabungan pemfaktoran a dan c memberikan nilai b .

Perhatikan contoh soal penyelesaian persamaan kuadrat ini. Salah satu akar dari persamaan kuadrat $x^2 + bx + 6 = 0$ adalah -3 . Tentukan nilai b dan akar lainnya.

Penyelesaian:

$$9 - 3b + 6 = 0 \text{ maka } b = 5.$$

Dapat dituliskan $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2) = 0$. Akar lainnya adalah -2 .

Contoh lainnya adalah persamaan kuadrat $2x^2 - 18x = 0$ diselesaikan dengan cara pemfaktoran.

$$2x(x - 9) = 0$$

Akar-akarnya adalah 0 dan 9.

Pemfaktoran dengan Ubin Berbeda

Bagaimana jika kamu diminta menyelesaikan $x^2 - 2x - 3 = 0$ dengan menggunakan ubin aljabar? Ubin-ubin aljabar, yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan kuadrat pada eksplorasi sebelumnya, mewakili nilai koefisien yang positif. Kamu perlu menentukan ubin-ubin aljabar yang mewakili nilai koefisien negatif. Ubin aljabar untuk mewakili nilai negatif diberikan warna yang berbeda daripada yang bernilai positif. Kamu bisa menerapkan warna apa saja untuk menentukannya. Pada buku ini, maka ubin yang mewakili nilai $-x$ berwarna merah dan ubin yang mewakili nilai -1 berwarna oranye.

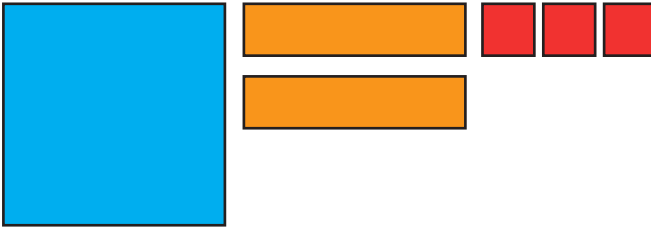


$-x$

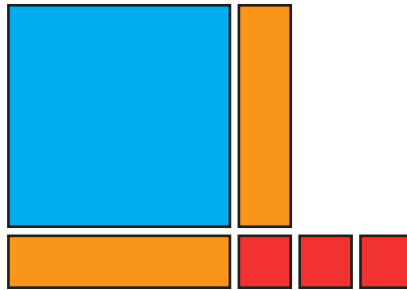


-1

Guna menyelesaikan soal di atas maka diperlukan satu ubin biru bernilai x^2 , dua ubin bernilai $-x$, dan tiga ubin bernilai -1 .



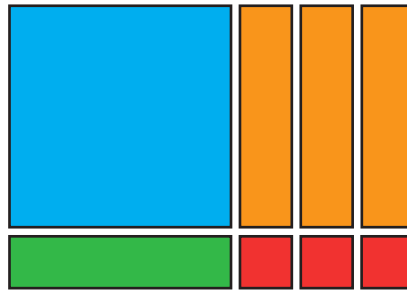
Dapatkah kamu menyusun sebuah persegi atau persegi panjang dari ubin-ubin aljabar di atas? Jika kamu mencoba membuatnya maka kamu mendapatkan bahwa tidak mungkin membangun sebuah persegi atau persegi panjang. Bagaimana menyelesaikan persamaan kuadrat ini dengan menggunakan ubin aljabar? Perhatikan gambar di bawah ini.



Nampak bahwa dibutuhkan dua ubin aljabar dengan luas x (dapat bernilai positif atau negatif) untuk membuat sebuah bentuk persegi panjang. Kedua ubin tersebut terdiri atas satu ubin bernilai positif dan satu ubin bernilai negatif. Jika kedua ubin ini ditambahkan maka persamaan kuadrat tidak berubah.



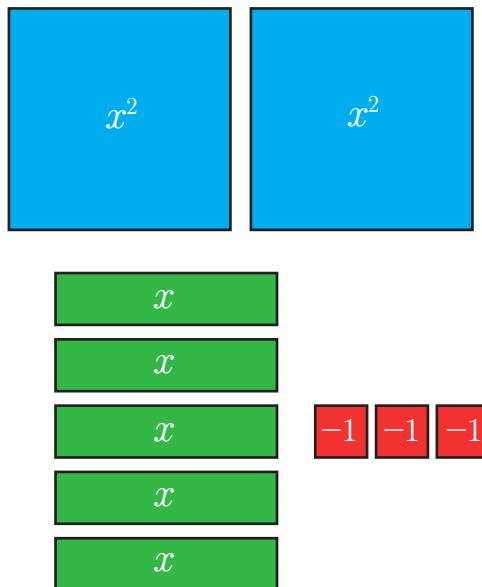
Penyusunan kembali akan memberikan bentuk di bawah ini.



Persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 3$ dapat dituliskan sebagai $(x + 1)(x - 3)$.

Akar-akarnya adalah -1 atau 3 .

Coba kamu selesaikan persamaan kuadrat $2x^2 + 5x - 3 = 0$. Ubin-ubin aljabar yang bersesuaian dengan persamaan kuadrat tersebut diberikan di bawah ini.



Ingat kembali bahwa bahwa gabungan ubin x dan ubin $-x$ bernilai 0 karena $x + (-x) = 0$



x^2	x^2	$-x$
x	x	-1
x	x	-1
x	x	-1

Bagaimana menuliskan pempfaktoran ini? Perhatikan tabel di bawah ini.

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

$$2x^2 + 6x - x - 3 = 0$$

$$2x(x + 3) - (x + 3) = 0$$

$$(2x - 1)(x + 3) = 0$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

atau

$$x + 3 = 0$$

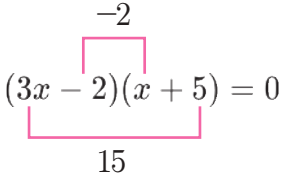
$$x = -3$$

Bagaimana menyelesaikan persamaan kuadrat di bawah ini secara pempfaktoran tetapi tanpa menggunakan ubin aljabar?

$$3x^2 + 13x - 10 = 0$$

Perhatikan langkah-langkah penyelesaian persamaan kuadrat tersebut yang terdapat dalam tabel di bawah ini.

1.	Kalikan 3 dengan -10	$3 \times (-10) = -30$
2.	Cari pasangan bilangan yang jika dikalikan hasilnya -30 dan jika dijumlahkan hasilnya $+13$	$15 \times (-2) = -30$ $15 + (-2) = 13$

Berdasarkan langkah 2 diperoleh bilangan 15 dan -2. Kedua bilangan ini digunakan untuk mendapatkan pemfaktoran. $(\dots x + \dots)(\dots x + \dots) = 0$ Perhatikan koefisien-koefisien persamaan kuadrat $3x^2 + 13x - 10 = 0 \text{ dengan } a = 3, b = 13, \text{ dan } c = -10.$ Koefisien $a = 3$ merupakan perkalian 3×1 sehingga pemfaktoran dapat dituliskan sebagai $(3x + \dots)(x + \dots)$. Jelaslah bahwa bilangan 15 merupakan perkalian 3×5 sehingga pemfaktoran menjadi seperti ini $(3x + \dots)(x + 5)$. Bilangan -2 dinyatakan sebagai perkalian -2×1 sehingga pemfaktoran menjadi $(3x - 2)(x + 5)$.	
--	--

Catatan: Tidak semua persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan pemfaktoran.

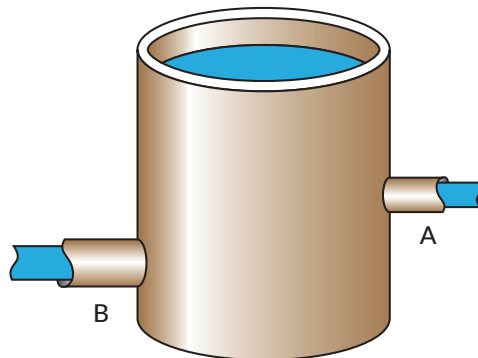
Latihan 5.2



Ayo, Mencoba

Kerjakan soal-soal berikut ini.

1. Salah satu akar dari persamaan kuadrat $2x^2 - bx - 6 = 0$ adalah 6. Tentukan nilai b dan akar lainnya.
2. Salah satu akar dari persamaan kuadrat $ax^2 - 17x - 6 = 0$ adalah 6. Tentukan nilai a dan akar lainnya.
3. Salah satu akar dari persamaan kuadrat $2x^2 - 3x + c = 0$ adalah -6 . Tentukan nilai c dan akar lainnya.
4. Tentukan solusi atau akar-akar dari persamaan kuadrat $2x^2 - 8x + 6 = 0$.
5. Tentukan akar-akar dari persamaan kuadrat $2x^2 - 18 = 0$.
6. Tentukan akar-akar dari persamaan kuadrat $2x^2 - 5x - 18 = 0$.
7. Akar-akar persamaan kuadrat dari $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $-\frac{1}{2}$ dan 3. Tentukan b , dan c jika $a = 2$.
8. Akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah $\frac{2}{3}$ dan -4 . Tentukan a dan b jika $c = -8$.
9. Suatu bilangan terdiri atas dua angka. Jika penyusun bilangan dikalikan diperoleh hasil 12. Jika bilangan tersebut dikurangi 9 maka diperoleh bilangan yang penyusun bilangan sebelumnya bertukar tempat. Tentukan bilangan tersebut.
10. Dua pipa, A dan B, mengisi sebuah tangki dalam waktu 24 menit. Pipa A mengisi tangki tersebut 36 menit lebih cepat daripada pipa B. Tentukan waktu yang diperlukan oleh pipa B untuk mengisi penuh tangki.



2. Melengkapi Kuadrat Sempurna

Eksplorasi

5.3

Menyelesaikan Persamaan Kuadrat dengan Melengkapi Kuadrat Sempurna

Selesaikan persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 2 = 0$. Bentuk ini sulit diselesaikan dengan faktorisasi. Perhatikan petunjuk untuk menyelesaikan persamaan kuadrat ini dengan cara berbeda.

1. Perhatikan diagram yang ditunjukkan oleh **Gambar 5.6**. Buatlah perkalian $(x + 2)(x + 2)$ dengan menggunakan diagram.
2. Tuliskan hubungan antara $(x + 2)^2$ dengan $x^2 + 4x + 2$.
3. Selesaikanlah nomor 2.
4. Ulangi langkah 1-3 untuk menyelesaikan persamaan kuadrat lainnya $x^2 + 10x + 6 = 0$.
5. Apa yang menjadi kunci penyelesaian dengan cara seperti ini? Jelaskan.

Cara menyelesaikan persamaan kuadrat seperti yang dilakukan dalam kegiatan eksplorasi di atas disebut sebagai cara melengkapi kuadrat sempurna. Melengkapi kuadrat sempurna adalah mengubah bentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ menjadi bentuk $(x + m)^2 = n$



Ayo, Berpikir Kreatif

Suatu persamaan kuadrat berbentuk $x^2 + 14x = 32$

1. Gunakan luas bangun datar untuk menggambarkan $x^2 + 14x$ sehingga nantinya dengan penambahan luas maka bangun datar tersebut menjadi bentuk persegi. Bangun datar mencakup satu luas persegi x^2 dan dua luas persegi panjang sebesar $7x$.



Petunjuk

luas persegi panjang $14x$ dibuat menjadi $7x + 7x$

2. Perluas bangun datar yang ditunjukkan oleh gambar nomor 1 agar terbentuk persegi. Nyatakan luas persegi sebagai perkalian sisi dengan sisi. Nyatakan juga nilai luas persegi. Jika keduanya membentuk persamaan maka didapatkan bentuk melengkapi persamaan kuadrat. Selesaikan persamaan kuadrat $x^2 + 14x = 32$.

Latihan 5.3



Ayo, Mencoba

Selesaikan persamaan kuadrat dengan cara melengkapi kuadrat sempurna.

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$
2. $2x^2 + 6x + 3 = 0$
3. $6x^2 + 2x + \frac{1}{6} = 0$
4. $x^2 - 12x - 15 = 0$
5. $\frac{3}{2}x^2 - 8x - 6 = 0$

3. Menggunakan Rumus Persamaan Kuadrat

Eksplorasi

5.4

Membuktikan Rumus Mencari Akar-Akar dari Persamaan Kuadrat

Buktikan bahwa akar-akar dari persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ adalah

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Persamaan kuadrat dapat diselesaikan dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat.



Petunjuk

Susunlah persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ sebagai bentuk yang penyelesaiannya dilakukan dengan melengkapi kuadrat sempurna.



Ayo, Berpikir Kritis

Akar-akar persamaan kuadrat berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Tunjukkan

1. hubungan antara penjumlahan kedua akar dengan koefisien-koefisien persamaan kuadrat, yaitu $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.
2. hubungan antara perkalian kedua akar dengan koefisien-koefisien persamaan kuadrat, yaitu $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Suatu persamaan kuadrat $x^2 + 4x + 3$ memiliki dua akar berbeda, yaitu p dan q .
Bagaimana bentuk persamaan kuadrat yang baru dengan akar $2p$ dan $2q$?

Penjumlahan kedua akar $p + q = -\frac{b}{a} = -4$

Perkalian kedua akar $pq = -\frac{c}{a} = 3$

Misalkan, kedua akar baru $P = 2p$ dan $Q = 2q$ membentuk persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Penjumlahan kedua akar

$$P + Q = 2p + 2q = 2(p + q) = -8 = -\frac{B}{A}$$

Maka $\frac{B}{A} = 8$ atau $B = 8A$

Perkalian kedua akar $PQ = 2p \times 2q = 4pq = 12 = \frac{C}{A}$

Maka $\frac{C}{A} = 12$ atau $C = 12A$

Persamaan kuadrat yang baru adalah $Ax^2 + 8Ax + 12A = 0$ atau $x^2 + 8x + 12 = 0$

Perhatikan contoh yang lain.

Suatu persamaan kuadrat $x^2 + 4x - 21 = 0$ memiliki dua akar berbeda yaitu p dan q . Bagaimana bentuk persamaan kuadrat yang baru dengan akar $\frac{1}{2p}$ dan $\frac{1}{2q}$?

Penjumlahan kedua akar $p + q = -\frac{b}{a} = -4$

Perkalian kedua akar $pq = -\frac{c}{a} = 21$

Misalkan, kedua akar baru $P = \frac{1}{2p}$ dan $Q = \frac{1}{2q}$ membentuk persamaan kuadrat $Ax^2 + Bx + C = 0$.

Penjumlahan kedua akar $P + Q$

$$P + Q = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2q} = \frac{q}{2pq} + \frac{p}{2pq} = \frac{p+q}{2pq} = \frac{4}{21}$$

Maka $\frac{B}{A} = \frac{4}{21}$

$$B = \frac{4}{21}A$$

Perkalian kedua akar PQ

$$PQ = \frac{1}{2p} \times \frac{1}{2q} = \frac{1}{4pq} = \frac{1}{84}$$

Maka

$$\frac{C}{A} = -\frac{1}{84}$$

$$C = -\frac{1}{84}A$$

Persamaan kuadrat yang baru adalah

$$Ax^2 + \frac{4}{21}Ax + \frac{-1}{84}A = 0$$

$$x^2 + \frac{4}{21}x - \frac{1}{84} = 0$$

Latihan 5.4



Ayo, Mencoba

Selesaikan persamaan kuadrat dengan cara menggunakan rumus persamaan kuadrat.

1. $x^2 + 5x + 6 = 0$
2. $2x^2 + 6x + 3 = 0$
3. $6x^2 + 2x + \frac{1}{6} = 0$
4. $\frac{1}{2}x^2 + 4x + 6 = 0$
5. $\frac{2}{3}x^2 + 2x - 12 = 0$

4. Jenis-Jenis Akar Persamaan Kuadrat

Ada tiga jenis solusi persamaan kuadrat, yaitu solusi dengan dua akar real yang berbeda, solusi dengan akar real yang kembar (sama), dan solusi dengan dua akar imajiner (tidak real) yang berbeda.

Lakukan eksplorasi di bawah ini untuk memahami solusi berupa akar-akar imajiner atau tidak nyata.

Eksplorasi 5.5 Akar-Akar Tidak Nyata atau Imajiner

Selesaikan $x^2 + 4x + 8 = 0$ dengan cara menggunakan rumus persamaan kuadrat yang dikerjakan dalam **Eksplorasi 5.4**.



Ayo, Berdiskusi

Apakah yang menjadi kendala dalam menyelesaikan persamaan kuadrat di atas?

Selama ini kamu mengenal bilangan yang nyata atau real. Pada garis bilangan, setiap bilangan real dapat menunjukkan suatu panjang yang tepat ($\sqrt{3}$ dan π juga bilangan real). Selain bilangan real, ada juga yang disebut bilangan imajiner. Bilangan imajiner merupakan akar dari bilangan negatif, yang didefinisikan sebagai $\sqrt{-1} = i$. Contoh, $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3i$. Bilangan kompleks merupakan gabungan bilangan real dan bilangan imajiner, misalnya $2 + 3i$. Bagaimana hasil **Eksplorasi 5.5**?

Perhatikan kembali penggunaan rumus persamaan kuadrat untuk menyelesaikan persamaan kuadrat berbentuk $ax^2 + bx + c = 0$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Jika $b^2 - 4ac = 0$ maka akan diperoleh solusi persamaan kuadrat yang berupa akar real yang kembar (atau yang sama).

Jika $b^2 - 4ac$ bernilai positif maka akan diperoleh solusi persamaan kuadrat yang berupa dua nilai akar real berbeda.

Jika $b^2 - 4ac$ bernilai negatif maka akan diperoleh solusi persamaan kuadrat yang berupa dua nilai akar imajiner berbeda.

Pernyataan matematika $b^2 - 4ac$ disebut sebagai diskriminan (D).

Latihan 5.5



Ayo, Mencoba

Tentukan jenis-jenis akar dari persamaan kuadrat di bawah ini dengan mengecek nilai diskriminan.

1. $4x^2 + 20x + 25 = 0$
2. $2x^2 - 5x + 6 = 0$
3. $3x^2 + 5x - 7 = 0$
4. $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 9 = 0$
5. $\frac{1}{3}x^2 + 4x - 3 = 0$



Ayo, Berefleksi

1. Apakah saya dapat menyelesaikan persamaan kuadrat dengan faktorisasi?
2. Apakah saya dapat menyelesaikan persamaan kuadrat dengan melengkapi kuadrat sempurna?
3. Apakah saya dapat menyelesaikan persamaan kuadrat dengan menggunakan rumus persamaan kuadrat?
4. Apakah saya dapat membedakan jenis solusi persamaan kuadrat dengan memperhatikan diskriminan?

B. Fungsi Kuadrat

Di SMP kamu telah belajar membedakan fungsi linear dengan fungsi non-linear. Saat ini kamu akan belajar tentang fungsi kuadrat. Fungsi kuadrat adalah salah satu fungsi nonlinear. Grafiknya tentu bukan merupakan garis lurus. Bagaimana mengenali fungsi kuadrat? Bagaimana karakteristik fungsi kuadrat? Bagaimana grafiknya? Dalam kehidupan sehari-hari, fungsi kuadrat dapat ditemui dalam keadaan apa saja? Mari belajar bersama.

1. Karakteristik Fungsi Kuadrat



Ayo, Bereksplorasi

Eksplorasi 5.6 Karakteristik Fungsi Kuadrat

Melalui eksplorasi ini diharapkan kamu mengenal karakteristik fungsi kuadrat.

Sebelumnya, perhatikan terlebih dahulu contoh di bawah ini.

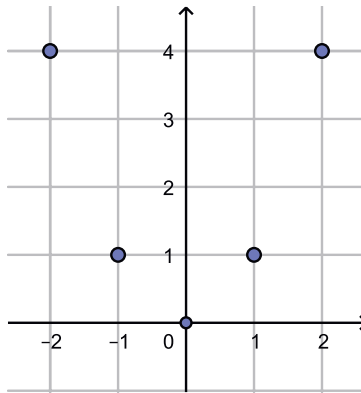
Buatlah grafik fungsi $f(x) = x^2$ dengan cara:

- a. Melengkapi **Tabel 5.1**

Tabel 5.1 Nilai x dan y untuk fungsi $f(x) = x^2$

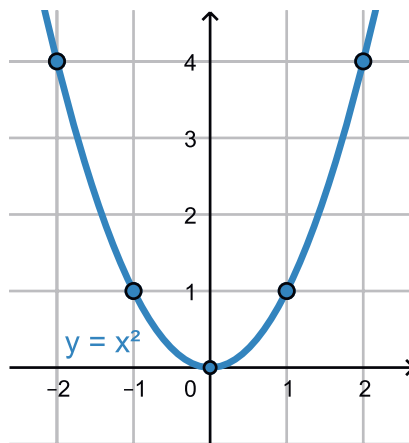
$f(x) = x^2$	
x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

- b. Plot setiap titik pada **Tabel 5.1** ke dalam sistem koordinat. Koordinat titik yang didapatkan dari **Tabel 5.1** adalah $(-2,4)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$, dan $(2,4)$.



Gambar 5.7 Plot Titik pada Grafik Fungsi $f(x) = x^2$

- c. Hubungkan titik-titik dalam sistem koordinat sehingga didapatkan grafik fungsinya.



Gambar 5.8 Grafik Fungsi $f(x) = x^2$



Ayo, Bekerja Sama

1. Kamu perlu bekerja sama untuk melakukan eksplorasi dengan menggambar grafik-grafik fungsi kuadrat terlebih dahulu. Jika kamu memiliki graphic calculator atau aplikasi GeoGebra, kamu boleh menggunakannya. Grafik yang digambar adalah $y = f(x)$ dengan $f(x)$ adalah fungsi kuadrat yang berbentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Lakukan langkah-langkah yang sama untuk setiap fungsi kuadrat ini, gunakan kertas berpetak.

- a. $f(x) = -x^2$
- b. $f(x) = x^2 - 2x - 3$
- c. $f(x) = -x^2 - x + 2$
- d. $f(x) = 3x^2 - 6x - 9$
- e. $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$
- f. $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$
- g. $f(x) = -x^2 + 4x - 4$
- h. $f(x) = 2x^2 + 4x + 2$
- i. $f(x) = -3x^2 - 12x - 15$
- j. $f(x) = 2x^2 + 1$

Gunakan hasilnya untuk menjawab pertanyaan-pertanyaan selanjutnya.

2. Selidiki peran tanda pada nilai a ($a > 0$ atau $a < 0$).

- a. $a > 0$
 - 1) Tuliskan fungsi-fungsi dengan $a > 0$
 - 2) Bagaimana bentuk grafiknya?
- b. $a < 0$
 - 1) Tuliskan fungsi-fungsi dengan $a < 0$
 - 2) Bagaimana bentuk grafiknya?
- c. Mengapa dalam daftar fungsi kuadrat di atas tidak ada fungsi dengan nilai $a = 0$?
- d. Lengkapi tabel dengan menggambar bentuk grafik.

$f(x) = ax^2 + bx + c$	Bentuk Grafik
$a > 0$	
$a < 0$	

3. Titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu y .

No.	$f(x) = ax^2 + bx + c$	Titik Potong Grafik Fungsi dengan Sumbu y	c
a.	$f(x) = -x^2$	$(0, 0)$	0

Untuk setiap fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$, titik potong grafik dengan sumbu y terletak pada koordinat _____

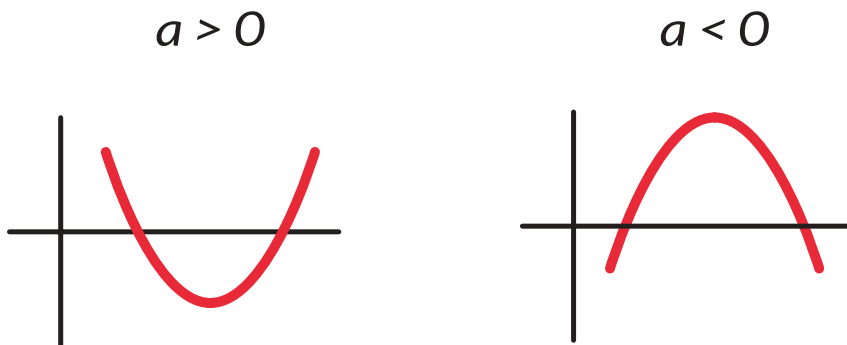
4. Titik potong grafik fungsi kuadrat dengan sumbu x .

No.	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$D = b^2 - 4ac$	Banyak Titik Potong Grafik dengan Sumbu x
a.	$f(x) = -x^2$		

$f(x) = ax^2 + bx + c$	Banyak Akar $ax^2 + bx + c = 0$	Banyak Titik Potong Grafik dengan Sumbu x
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

- Menentukan sumbu simetri dari setiap grafik.
Contoh sumbu simetri dari $f(x) = x^2$ adalah $x = 0$.
- Menentukan titik maksimum atau minimum dari setiap grafik.
Contoh titik minimum dari $y = x^2$ adalah $0, 0$.

Berdasarkan **Eksplorasi 5.6** kamu menemukan bahwa fungsi kuadrat terbuka ke atas jika $a > 0$ dan terbuka ke bawah jika $a < 0$.

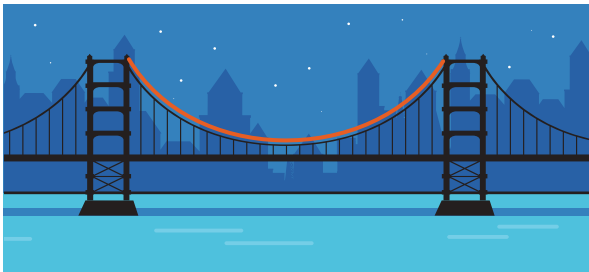


Gambar 5.9 Dua Jenis Grafik Fungsi Kuadrat dengan Tanda a Berbeda

Eksplorasi 5.6 menunjukkan peran c dalam fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ yaitu menentukan titik potong grafik dengan sumbu y . Nilai c menentukan titik potong grafik dengan sumbu y .

Latihan 5.6

1. a. Tentukan gambar parabola yang terbuka ke atas dan ke bawah.



Jembatan A

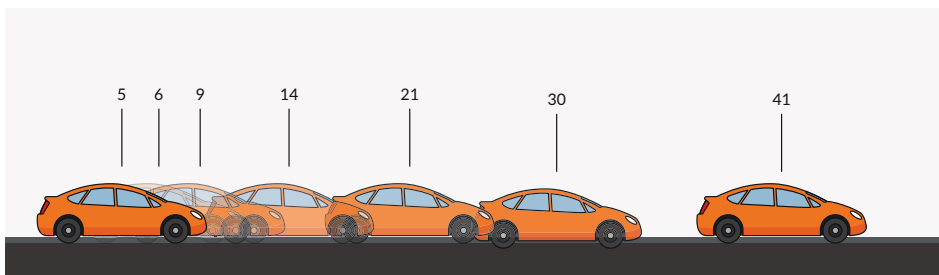


Jembatan B

- b. Bandingkan kedua parabola. Menurut kamu, parabola mana lebih lebar terbukanya? Konstanta dari fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ mana yang menentukan terbukanya sebuah parabola?
2. Fungsi kuadrat yang terbuka ke atas adalah _____ (Jawaban dapat lebih dari satu)
- $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
 - $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$
 - $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$
 - $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$
3. Fungsi kuadrat yang terbuka ke bawah adalah _____ (Jawaban dapat lebih dari satu)
- $f(x) = x^2 + 2x + 1$
 - $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$
 - $f(x) = -3x^2 + 8x - 1$
 - $f(x) = 4x^2 + 11x - 7$

Latihan 5.7

1. Kamu perhatikan bahwa posisi awal tidak dimulai pada nol.



- a. Isi tabel jarak tempuh mobil terhadap waktu.

Waktu (det)	0	1	2	3	4	5	6
Jarak (m)							

- b. Gambarkan grafik jarak terhadap waktu pada kertas berpetak.
 - c. Apakah hasilnya menggambarkan bentuk parabola?
 - d. Berapa nilai c jika merujuk pada $y = f(x) = ax^2 + bx + c$?
2. Tabel di bawah menunjukkan jarak tempuh sebuah mobil pada setiap waktu.

Waktu (Detik)	0	1	2	3	4	5	6
Jarak (m)	0	5	8	9	8	5	0

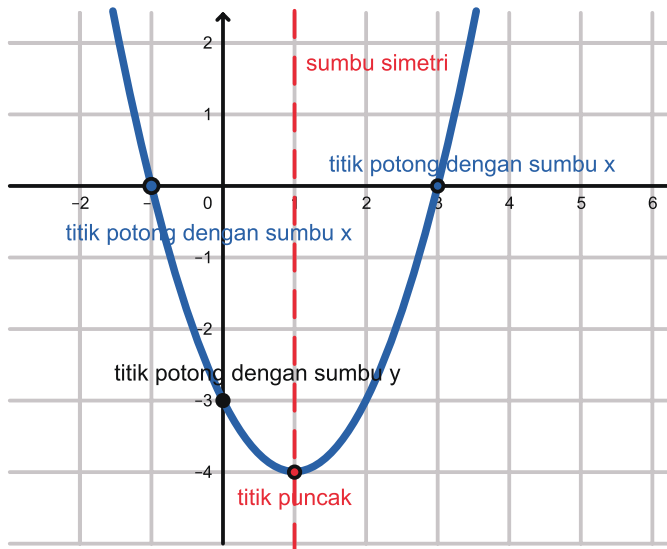
Tanpa menggambar grafik, tentukan apakah grafik fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah. Jelaskan alasanmu.

3. Tabel di bawah menunjukkan keuntungan penjualan produk untuk jumlah produk yang terjual.

Jumlah Benda	0	10	20	25	30	40
Keuntungan (Ribuan Rupiah)	0	800	1200	1250	1200	800

Tanpa menggambar grafik, tentukan apakah grafik fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah. Jelaskan alasanmu.

Dapatkah kamu menyebutkan karakteristik lain dari fungsi kuadrat berdasarkan Eksplorasi 5.6.



Gambar 5.10 Karakteristik Fungsi Kuadrat

Gambar ulang berdasarkan tautan <https://buku.kemdikbud.go.id/s/jqpbff>.

Perhatikan **Gambar 5.10** dan amati beberapa titik istimewa dalam fungsi kuadrat:

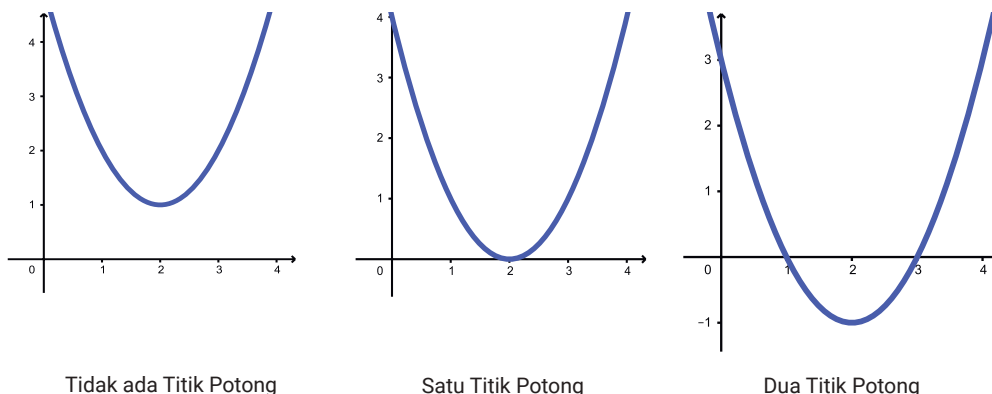
- Titik potong dengan sumbu y, yaitu $(0, -3)$. Apakah kamu masih ingat bagaimana menentukan titik potong dengan sumbu y?
- Titik-titik potong dengan sumbu x, yaitu $(-1, 0)$ dan $(3, 0)$.
- Vertex disebut juga sebagai titik puncak, dapat berupa titik maksimum atau titik minimum (sesuai dengan grafik terbuka ke atas atau ke bawah). Titik minimum dalam grafik yaitu $(1, -4)$.
- Sumbu simetri selalu melalui titik puncak, $x = 1$



Ayo, Berpikir Kritis

1. Bagaimana karakteristik grafik fungsi kuadrat dengan $D < 0$ dan $a < 0$?
2. Bagaimana hubungan antara titik potong dengan sumbu x dengan jenis akar persamaan kuadrat?

Titik potong dengan sumbu x menunjukkan bahwa $f(x) = 0$, artinya kamu mencari akar-akar persamaan kuadrat.



Gambar 5.11 Titik Potong dengan Sumbu x

Gambar ulang berdasarkan tautan <https://buku.kemdikbud.go.id/s/jqpbffj>.

Pada fungsi kuadrat berbentuk $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, diskriminan diberikan oleh nilai $D = b^2 - 4ac$ untuk menentukan jumlah titik potong dengan sumbu x.

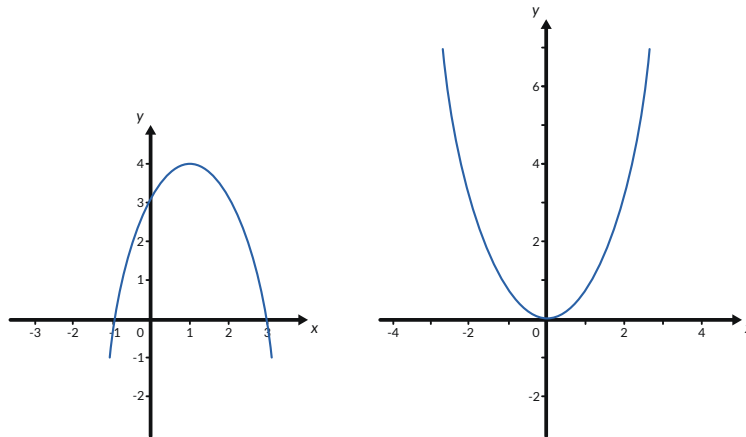


$D > 0$ maka ada dua titik potong dengan sumbu x. (dua akar real berbeda)
 $D = 0$ maka ada satu titik potong dengan sumbu x. (akar real kembar)
 $D < 0$ maka tidak ada titik potong dengan sumbu x. (dua akar imajiner)

Latihan 5.8

1. Tentukan banyak titik potong dengan sumbu x dari fungsi kuadrat berikut.
 - a. $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$
 - b. $f(x) = -4x^2 + 4x + 5$
 - c. $f(x) = -3x^2 + 4x + 1$
 - d. $f(x) = 4x^2 + 4x + 5$
 - e. $f(x) = x^2 + 2x + 1$
 - f. $f(x) = -2x^2 + 3x + 5$
 - g. $f(x) = -3x^2 + 8x - 1$
 - h. $f(x) = 4x^2 + 11x - 7$

2. Tentukan koordinat titik puncak, sumbu simetri, koordinat titik potong dengan sumbu y , dan banyak titik potong dari grafik fungsi-fungsi kuadrat di bawah ini.



Apakah hubungan antara titik puncak dengan grafik terbuka ke atas atau ke bawah?

3. Perhatikan tabel di bawah ini, yang menunjukkan jarak tempuh sebuah mobil sebagai fungsi dari waktu

Waktu (detik)	0	1	2	3	4	5	6
Jarak (m)	8	13	16	17	16	13	8

- Berapa jarak maksimum yang ditempuh?
 - Berapa koordinat titik maksimum?
 - Tentukan persamaan garis sumbu simetri.
4. Perhatikan tabel di bawah ini, yang menunjukkan biaya produksi sebagai fungsi dari jumlah barang.

Biaya Produksi	0	500	400	500	800	1300
Jumlah	0	10	20	30	40	50

- Berapa biaya minimum?
- Berapa koordinat titik minimum?
- Tentukan persamaan garis sumbu simetri.



Ayo, Berpikir Kritis

Untuk setiap kasus di bawah ini tentukan apakah grafik fungsi kuadrat terbuka ke atas atau ke bawah.

- d. Biaya produksi sebagai fungsi dari jumlah barang.
- e. Keuntungan sebagai fungsi dari jumlah barang.
- f. Kualitas bunyi dari *sound system* sebagai fungsi dari amplitudo gelombang bunyi.
- g. Efektivitas obat sebagai fungsi dari dosis obat.
- h. Keselamatan pemakaian suatu jenis bahan sebagai fungsi dari waktu pemakaian.

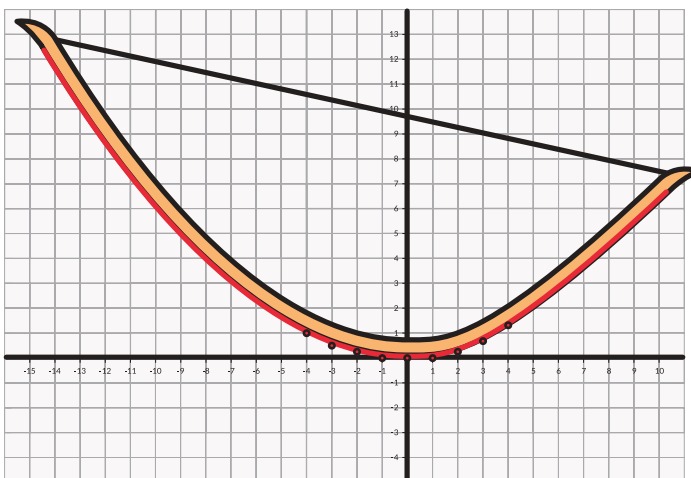
2. Mengonstruksi Fungsi Kuadrat

Eksplorasi 5.7 Menentukan Fungsi Kuadrat dari Lengkungan Busur



Ayo, Bereksplorasi

Tentukan tiga titik yang melalui busur.



Gambar 5.12 Busur Panah sebagai Fungsi Kuadrat

Bagaimana kamu menentukan fungsi kuadrat dari lengkungan busur?

Jika tiga titik diketahui maka $f(x) = ax^2 + bx + c$ dapat ditentukan. Kamu dapat menggunakan sistem persamaan tiga variabel untuk menentukan nilai a , b , dan c .

Contoh:

Carilah persamaan fungsi kuadrat yang grafiknya melalui titik $K(-1, 0)$, $L(0, -3)$, dan $M(1, -4)$.

Alternatif Penyelesaian 1:

Substitusi koordinat $K(-1, 0)$ ke dalam fungsi, didapat persamaan:

$$0 = a(-1)^2 + b(-1) + c$$

Substitusi koordinat $L(0, -3)$ didapat persamaan:

$$-3 = a(0)^2 + b(0) + c$$

Substitusi koordinat $M(1, -4)$ didapat persamaan:

$$-4 = a(1)^2 + b(1) + c$$

Dari tiga persamaan ini didapatkan sistem persamaan linear

$$\begin{cases} a - b + c = 0 \\ + c = -3 \\ a + b + c = -4 \end{cases}$$

Kamu telah mempelajari sistem persamaan linear dan solusinya adalah $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$

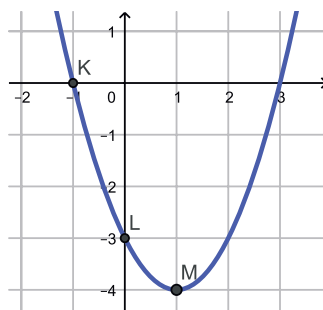
Persamaan fungsi kuadrat yang melalui titik $K(-1, 0)$, $L(0, -3)$, dan $M(1, -4)$ adalah

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

Alternatif Penyelesaian 2:

Memanfaatkan fakta bahwa $M(1, -4)$ adalah titik puncak fungsi, maka

$$f(x) = a(x - 1)^2 - 4$$



Gambar 5.13 Grafik fungsi kuadrat yang melalui $K(-1, 0)$, $L(0, -3)$, dan $M(1, -4)$

Substitusi titik potong dengan sumbu y $-3 = a(0 - 1)^2 - 4$

$$-3 = a - 4$$

$$a = 1$$

Sehingga persamaan fungsi kuadratnya adalah $f(x) = x^2 - 2x - 3$

Kamu dapat mengeksplorasi berbagai bentuk fungsi kuadrat berdasarkan grafik-grafik yang telah kamu buat sebelumnya.

Eksplorasi 5.8 Menuliskan Fungsi Kuadrat



Ayo, Bereksplorasi

Gunakan grafik-grafik dalam rubrik **Ayo, Bekerja Sama** dalam hal. 141.

1. Memfaktorkan bentuk fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$
 - a. Tentukan fungsi yang dapat dituliskan dalam bentuk $y = a(x - p)(x - q)$
 - 1) Tentukan nilai p dan q
 - 2) Tentukan titik potong grafik dengan sumbu x
 - 3) Tentukan nilai $D = b^2 - 4ac$
 - 4) Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
 - b. Tentukan fungsi yang dapat dituliskan dalam bentuk $y = a(x - r)^2$
 - 1) Tentukan nilai r
 - 2) Bagaimana letak grafik dengan sumbu x ? Berapa koordinatnya?
 - 3) Tentukan nilai $D = b^2 - 4ac$
 - 4) Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
 - c. Tentukan fungsi yang tidak melalui sumbu x .
 - 1) Tentukan nilai $D = b^2 - 4ac$
 - 2) Tentukan akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$
 - d. Bagaimana nilai $D = b^2 - 4ac$ menentukan banyak perpotongan grafik fungsi dengan sumbu x ?

Fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$	Bentuk Faktor	Koordinat Titik Potong dengan Sumbu x
$D > 0$		
$D = 0$		
$D < 0$		

2. Sumbu simetri adalah garis yang melalui titik puncak. Untuk setiap grafik fungsi yang ada:
 - a. Tentukan sumbu simetrinya
 - b. Tentukan kaitan nilai p, q, r pada no. 1 dengan sumbu simetri
 - c. Tentukan nilai $-\frac{b}{2a}$
 - d. Tuliskan dua cara menentukan sumbu simetri.
3. Titik puncak adalah koordinat titik maksimum atau titik minimum. Untuk setiap grafik fungsi yang ada:
 - a. Tentukan koordinat titik puncaknya
 - b. Tentukan hubungan nilai absis titik puncak dengan sumbu simetri
 - c. Substitusi nilai sumbu simetri pada fungsi $f(x) = ax^2 + bx + c$. Nilai ini sama dengan apa?
 - d. Hitung nilai $\frac{D}{-4a}$. Nilai ini sama dengan apa?
 - e. Ubah bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$ menjadi bentuk $f(x) = a(x - h)^2 + k$. Nilai (h, k) menunjukkan apa?
 - f. Tuliskan berbagai cara menentukan koordinat titik puncak grafik fungsi kuadrat.

Berdasarkan eksplorasi kamu melihat ada tiga bentuk untuk menuliskan fungsi kuadrat.

1. Bentuk standar $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
2. Titik potong dengan sumbu x pada $(p, 0)$ dan $(q, 0)$, yaitu $y = f(x) = a(x - p)(x - q)$
3. Bentuk dengan titik puncak (h, k) yaitu $y = f(x) = a(x - h)^2 + k$

Latihan 5.9

1. Fungsi kuadrat dengan titik puncak (2,6) dan melalui titik (1,7). Nyatakan fungsi kuadrat dalam ketiga bentuk.
2. Sebuah bola dilemparkan dari ketinggian awal 4 m dan mencapai ketinggian maksimum 8 m setelah dua detik sejak dilempar. Nyatakan fungsi kuadrat dalam ketiga bentuk.

3.



Ayo, Berpikir Kritis

Untuk setiap kasus di bawah ini tentukan apakah diskriminan fungsi kuadrat sama dengan nol, lebih kecil dari nol atau lebih besar dari nol.

- a. Pendapatan dari penjualan sebagai fungsi dari jumlah barang.
- b. Keuntungan sebagai fungsi dari jumlah barang.
- c. Kualitas bunyi dari *sound system* sebagai fungsi dari amplitudo gelombang bunyi.
- d. Efektivitas obat sebagai fungsi dari dosis obat.
- e. Keselamatan pemakaian suatu jenis bahan sebagai fungsi dari waktu pemakaian.

3. Menyelesaikan Masalah Fungsi Kuadrat

Eksplorasi

5.9

Menentukan Penghematan Maksimum dari Grafik



Ayo, Bereksplorasi

Suatu kajian dilakukan untuk mengetahui penghematan bahan bakar (km/liter) terhadap kelajuan mobil (km/jam). $P(x)$ adalah penghematan bahan bakar dan x adalah kelajuan mobil.

Tabel 5.2 Penghematan Bahan Bakar Terhadap Kelajuan Mobil

$P(x)$	9,5	10,8	11,7	12,3	12,2	12,8	12,7	12,8	12,9	12,2	11,6	10,8
x	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112

Sumber: Transportation Energy Data Book

1. Buat grafik $P(x)$ terhadap x dengan bentuk parabola, mungkin saja ada titik-titik yang tidak melalui grafik.
2. Setelah mendapatkan bentuk grafiknya tentukan fungsi kuadratnya.
3. Berapa kelajuan yang menghasilkan penghematan bahan bakar maksimum?



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat menggunakan kalkulator atau aplikasi Desmos atau GeoGebra untuk menentukan fungsi kuadrat dari sekelompok data.

Petunjuk menggunakan kalkulator untuk membuat fungsi kuadrat dari sekelompok data.

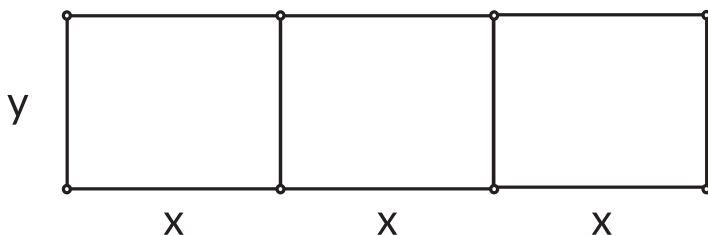
1. Masukkan data pada kalkulator.
2. Buatlah sebaran data yang tampak pada layar kalkulator.
3. Gunakan fitur *quadratic regression* untuk mendapatkan grafik kuadrat terbaik.
4. Untuk mendapatkan kelajuan yang bersesuaian dengan penghematan bahan bakar maksimum, gunakan fitur maksimum pada kalkulator.

Eksplorasi 5.10 Menentukan Luas Maksimum



Ayo, Bereksplorasi

Seorang petani ingin membuat pagar pembatas tanaman seperti yang ditunjukkan oleh gambar di bawah ini. Panjang kawat adalah 96 m. Berapa luas maksimum yang dapat dibuat oleh petani?



Dua contoh di atas menunjukkan salah satu kegunaan fungsi kuadrat untuk dapat mengetahui nilai maksimum atau minimum. Kamu sudah

mempelajari beberapa cara untuk mendapatkan nilai minimum atau maksimum.

Fungsi kuadrat digunakan dalam berbagai bidang kehidupan, seperti olahraga, bangunan, ekonomi, kesehatan, dan lainnya.



Ayo, Mencoba

Harga 1 buku diberikan oleh $h = 900 - 0,25x$ dengan x adalah banyak buku yang diproduksi. Jika pendapatan dari penjualan adalah $R = hx$, tentukan banyak buku yang diproduksi agar diperoleh pendapatan optimal atau maksimal.

Latihan 5.10

1. Bandingkan fungsi linear dengan fungsi kuadrat.

Waktu (detik)	Jarak Tempuh (m)	Jarak Tempuh (m)
0	0	0
1	2	3
2	4	8
3	6	15
4	8	24
5	10	35
6	12	48

Apakah untuk setiap detik perubahan jarak sama untuk kedua fungsi? Jelaskan.

2. Tabel di bawah menunjukkan hubungan antara kelajuan mobil dengan efisiensi bahan bakar. Buatlah pendekatan grafik fungsi kuadrat dengan $P(x)$ adalah penghematan bahan bakar dan x adalah kelajuan mobil.

Kelajuan (km/jam)	16	32	48	64	80	96	112	128
-------------------	----	----	----	----	----	----	-----	-----

Bahan Bakar (km/liter)	7,5	10,2	12,2	13,2	13,5	12,8	11,3	9,1
-----------------------------------	-----	------	------	------	------	------	------	-----

Berapa kelajuan yang menghasilkan penghematan maksimum?

3. Bandingkan fungsi eksponensial dengan fungsi kuadrat. Apakah fungsi eksponensial mempunyai nilai maksimum atau nilai minimum?



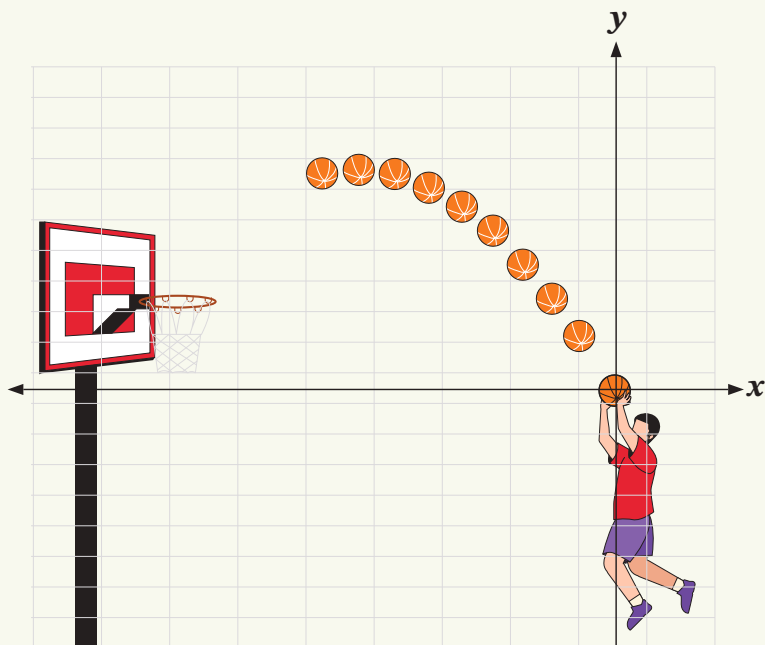
Ayo, Berefleksi

1. Apakah kamu sudah memahami karakteristik fungsi kuadrat?
2. Apakah kamu dapat membentuk fungsi kuadrat jika diketahui tiga titik dari fungsi kuadrat?
3. Apakah kamu dapat membentuk fungsi kuadrat jika diketahui titik potong dengan sumbu x ?
4. Apakah kamu dapat membentuk fungsi kuadrat jika diketahui titik puncak?
5. Apakah kamu dapat membuat grafik fungsi kuadrat jika diberikan sekelompok data?
6. Apakah kamu dapat membuat fungsi kuadrat dari suatu masalah dan menyelesaikannya?

Uji Kompetensi

1. Suatu masalah matematika dari Babilonia berbunyi sebagai berikut, "Berapa sisi sebuah persegi jika luas persegi dikurangi sisi persegi adalah 600?".
2. Suatu persamaan kuadrat berbentuk $x^2 - 5x - 14 = 0$.
 - a. Tentukan jumlah dan hasil perkalian kedua akar persamaan kuadrat.
 - b. Buatlah suatu persamaan kuadrat yang baru dengan setiap akarnya merupakan hasil penjumlahan akar persamaan kuadrat lama dengan 3.
 - c. Buatlah suatu persamaan kuadrat yang baru dengan setiap akarnya merupakan hasil perkalian akar persamaan kuadrat lama dengan 3.
3. Suatu persamaan kuadrat berbentuk $2x^2 - 7x - 6 = 0$.
 - a. Tentukan jumlah dan hasil perkalian kedua akar persamaan kuadrat

- b. Buatlah suatu persamaan kuadrat yang baru dengan setiap akarnya merupakan hasil penjumlahan akar persamaan kuadrat lama dengan $\frac{1}{2}$.
 - c. Buatlah suatu persamaan kuadrat yang baru dengan setiap akarnya merupakan hasil perkalian akar persamaan kuadrat lama dengan $\frac{1}{2}$.
4. Perhatikan gambar di bawah ini. Apakah bola basket akan masuk ke dalam basket (*ring*)? Jelaskan jawabanmu.

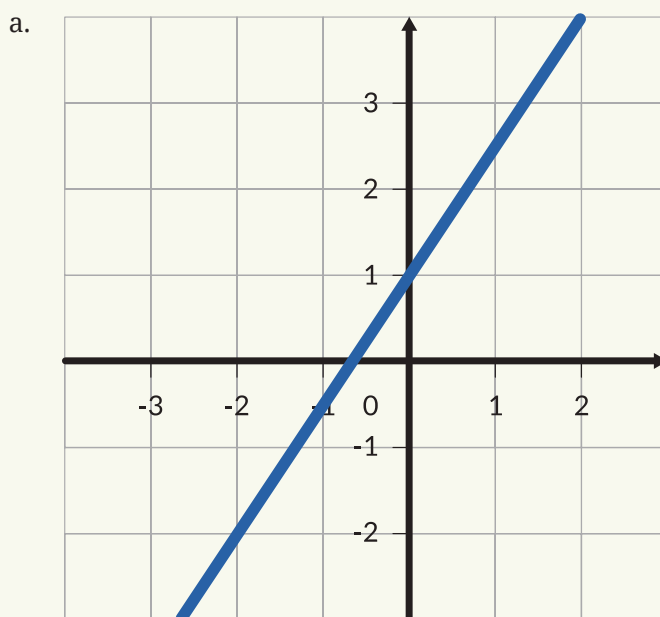


5. Para ilmuwan mengukur konsentrasi obat dalam darah seiring dengan berjalannya waktu. Fungsi kuadrat digunakan untuk memodelkan hal ini, yaitu $C(t) = -0,0003t^2 + 0,09t$ dengan satuan t adalah menit dan konsentrasi obat dalam mg/L. Tentukan berapa lama waktu yang diperlukan agar konsentrasi obat menjadi nol dan konsentrasi maksimum obat yang terdapat dalam darah.
6. Perhatikan tabel di bawah ini yang menunjukkan hubungan antara harga jual sebuah pulpen dengan jumlah pulpen yang terjual.

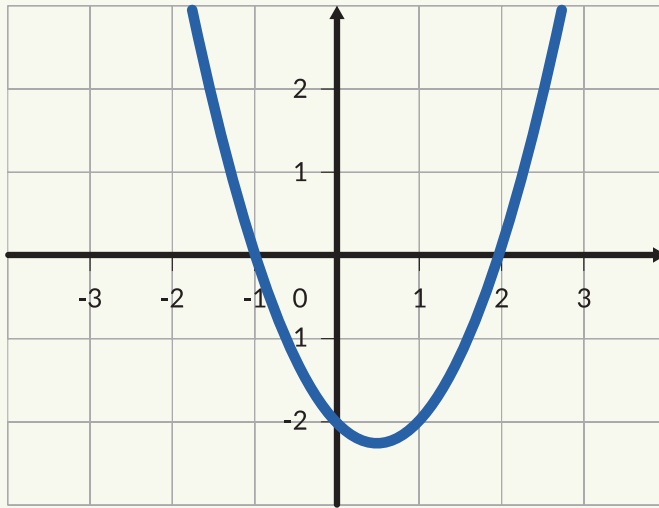
Harga Satu Pulpen (p)	Jumlah Pulpen yang Terjual ($J(p)$)
3000 rupiah	2000
2700 rupiah	1800
2400 rupiah	1600

Biaya pembuatan satu pulpen ialah Rp2.000,00. Tentukan:

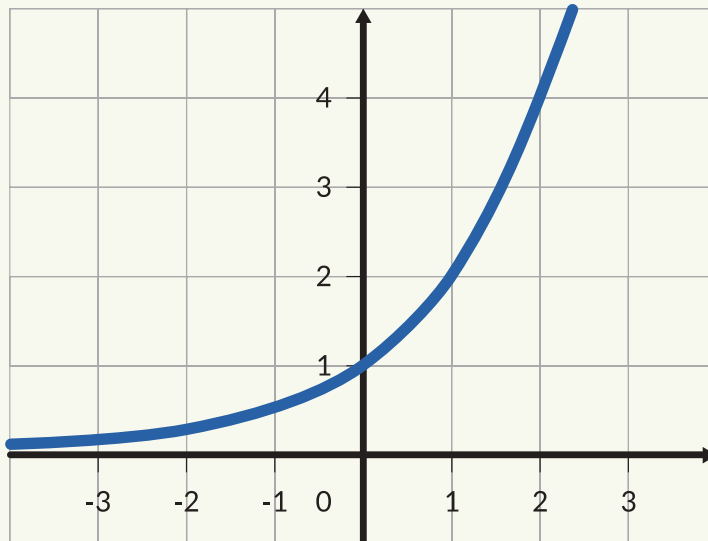
- fungsi $J(p)$ yang menyatakan hubungan antara harga sebuah pulpen dengan penjualan sejumlah pulpen,
 - fungsi keuntungan yang merupakan selisih dari harga penjualan dengan biaya pembuatan sejumlah pulpen, dan
 - harga jual sebuah pulpen untuk mendapatkan keuntungan terbesar.
7. Dari grafik berikut, yang manakah yang merupakan grafik fungsi kuadrat?



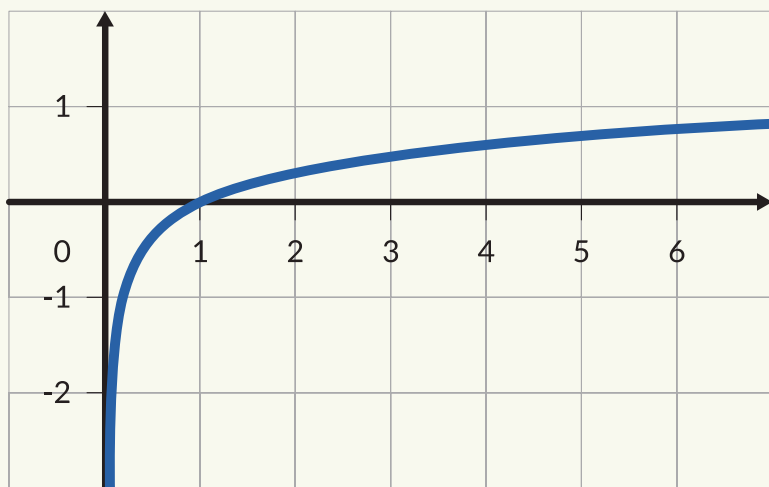
b.



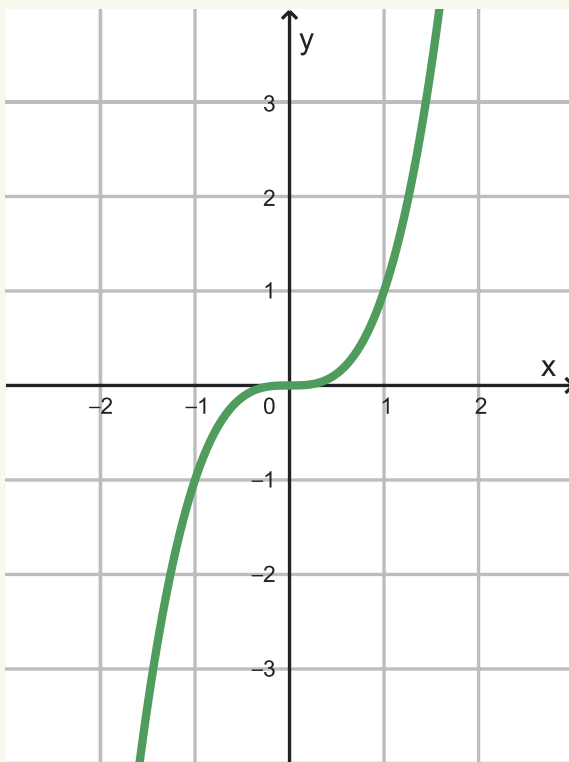
c.



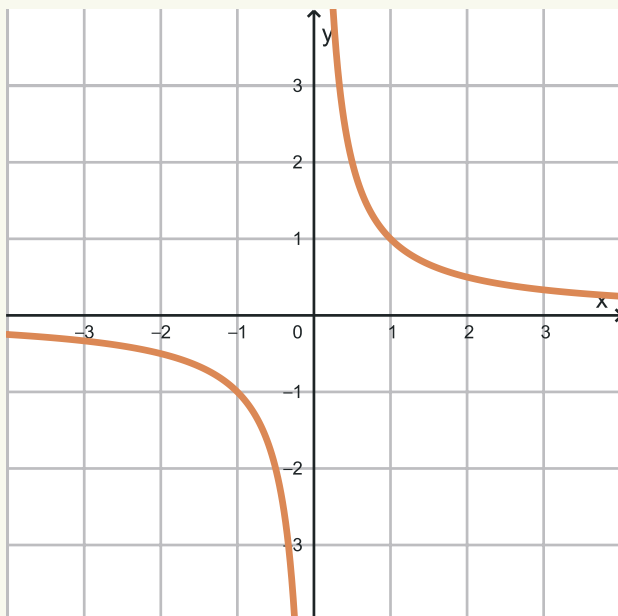
d.



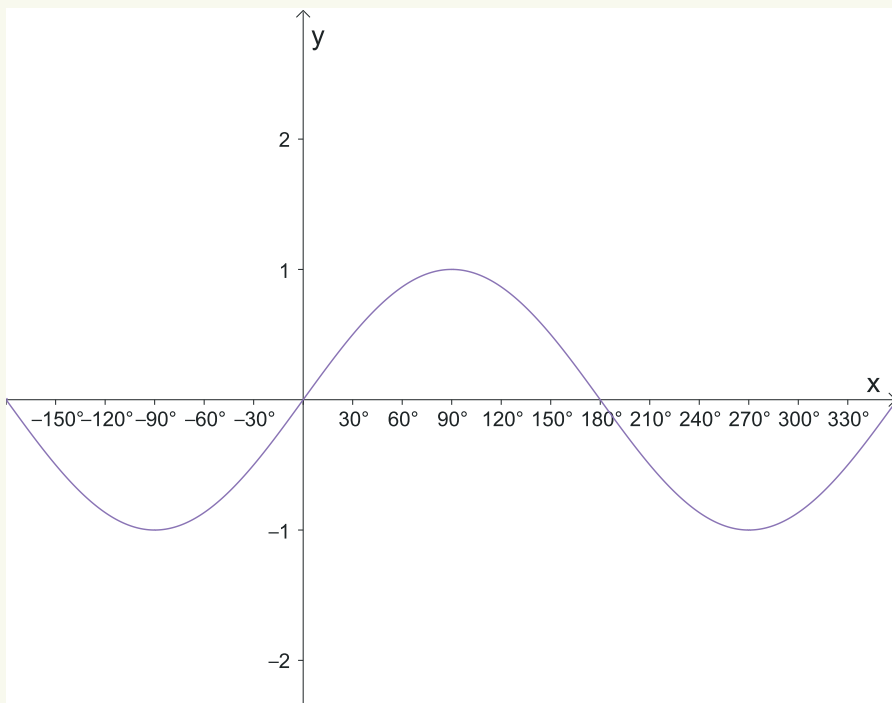
e.



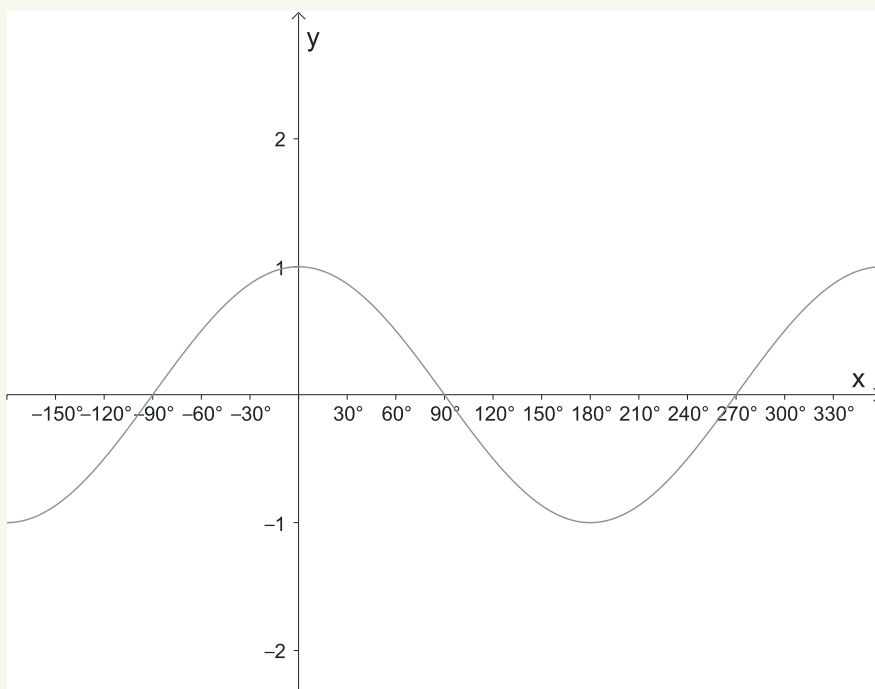
f.



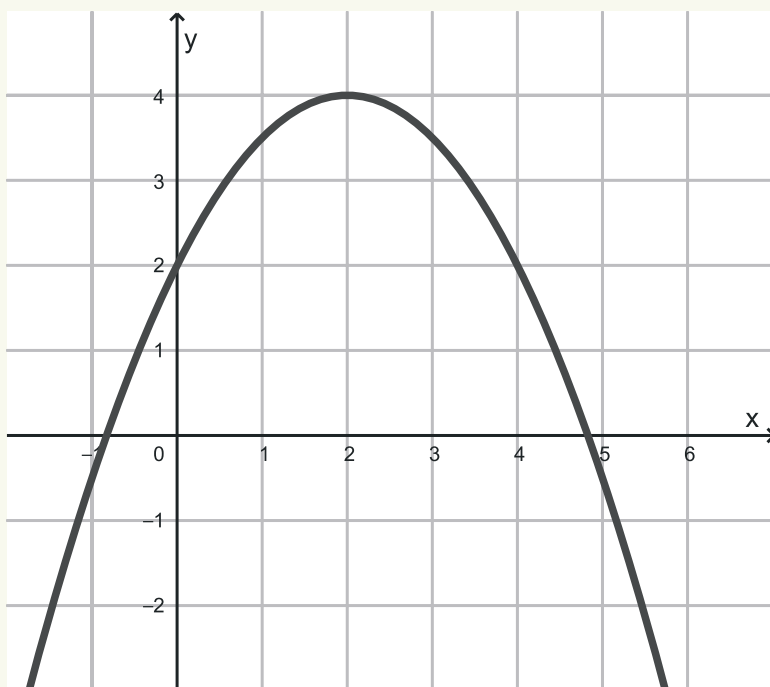
g.



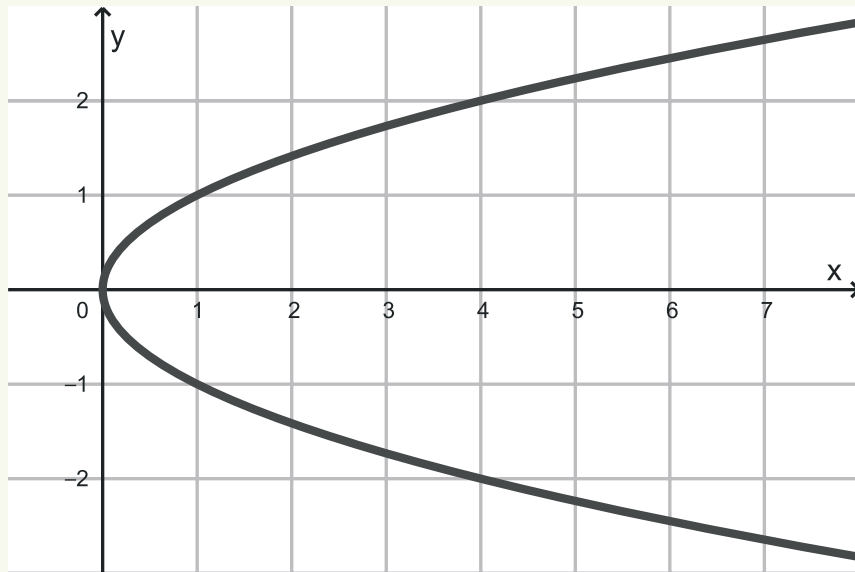
h.



i.



j.



8. Gambarkan grafik fungsi $y = 2x^2 - 4x - 16$
 - a. Tentukan titik potong grafik dengan sumbu x.
 - b. Tentukan titik potong grafik dengan sumbu y.
 - c. Tentukan sumbu simetrinya.
 - d. Apakah fungsi ini memiliki nilai maksimum atau minimum? Tentukan nilainya.
9. Bola dilemparkan ke atas dari tanah dengan kecepatan tertentu sehingga ketinggian yang dicapai merupakan fungsi dari waktu, $h(t) = -5t^2 + 40t$. Berapa ketinggian maksimum yang dicapai oleh bola?
10. Pendapatan dari hasil penjualan barang $P(q)$ ditentukan oleh jumlah barang yang diproduksi q . $P(q) = -20q^2 + 3000q$. Tentukan pendapatan maksimal atau optimal dan jumlah barang yang bersesuaian dengannya.

Pengayaan

Persamaan Kuadrat Berpangkat

Carilah semua solusi real dari persamaan berikut:

$$(x^2 - 5x + 5)^{(x^2 - 11x + 30)} = 1$$

Ada enam kemungkinan solusi untuk persamaan tersebut. Apakah kamu dapat menemukan keenam solusinya?

Berikut ini beberapa permasalahan untuk diselesaikan:

1. Carilah semua solusi untuk $(x^2 - 7x + 11)^{(x^2 - 13x + 42)} = 1$. Bagaimana solusi ini dibandingkan dengan persamaan yang pertama?
2. Dapatkah kamu menentukan sebuah persamaan kuadrat berpangkat dengan solusi 3, 4, 5, 6, 7, 8? Bagaimana dengan 4, 5, 6, 7, 8, 9?
3. Jelaskan mengapa hanya ada 4 solusi untuk $(x^2 - 5x + 5)^{(x^2 - 4)} = 1$?
4. Jelaskan mengapa hanya ada 3 solusi untuk $(x^2 - 6x + 10)^{(x^2 + x - 2)} = 1$?
5. Dapatkah kamu menentukan sebuah persamaan kuadrat berpangkat dengan tepat 2 solusi? 5 solusi?

Sumber: <https://nrich.maths.org/11009>



Petunjuk

Untuk persamaan bilangan berpangkat $a^b = 1$, nilai a dan b apa yang memenuhi persamaan tersebut?

Jika $a = 1$, maka apa kemungkinan nilai b ?

Jika $a = -1$, maka apa kemungkinan nilai b ?

Jika $a = 2$, maka b harus memiliki nilai apa?

Refleksi

Pertanyaan Asesmen Diri	Bisa	Perlu Bantuan	Belum Bisa
1. Saya bisa mengidentifikasi persamaan kuadrat.			
2. Saya bisa merumuskan masalah sehari-hari dalam bentuk persamaan kuadrat.			
3. Saya bisa menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara faktorisasi.			

Pertanyaan Asesmen Diri	Bisa	Perlu Bantuan	Belum Bisa
4. Saya bisa menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara melengkapi kuadrat sempurna.			
5. Saya bisa menyelesaikan persamaan kuadrat dengan cara menggunakan rumus persamaan kuadrat.			
6. Saya bisa mengidentifikasi jenis-jenis solusi persamaan kuadrat berdasarkan nilai diskriminan.			
7. Saya bisa menggambar grafik fungsi kuadrat.			
8. Saya bisa menjelaskan karakteristik fungsi kuadrat apakah terbuka ke atas atau ke bawah, apakah mempunyai titik potong dengan sumbu -x atau tidak, apakah mempunyai titik maksimum atau titik minimum.			
9. Saya bisa menyelesaikan soal-soal fungsi kuadrat yang berkaitan dengan titik maksimum atau titik minimum dan titik potong dengan sumbu-x.			
10. Saya bisa mengkonstruksi fungsi kuadrat.			

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.

ISBN: 978-623-118-558-7

Bab

6

Representasi dan Interpretasi Data



Bagaimana representasi dan interpretasi data dapat membantu kita dalam pengambilan keputusan?

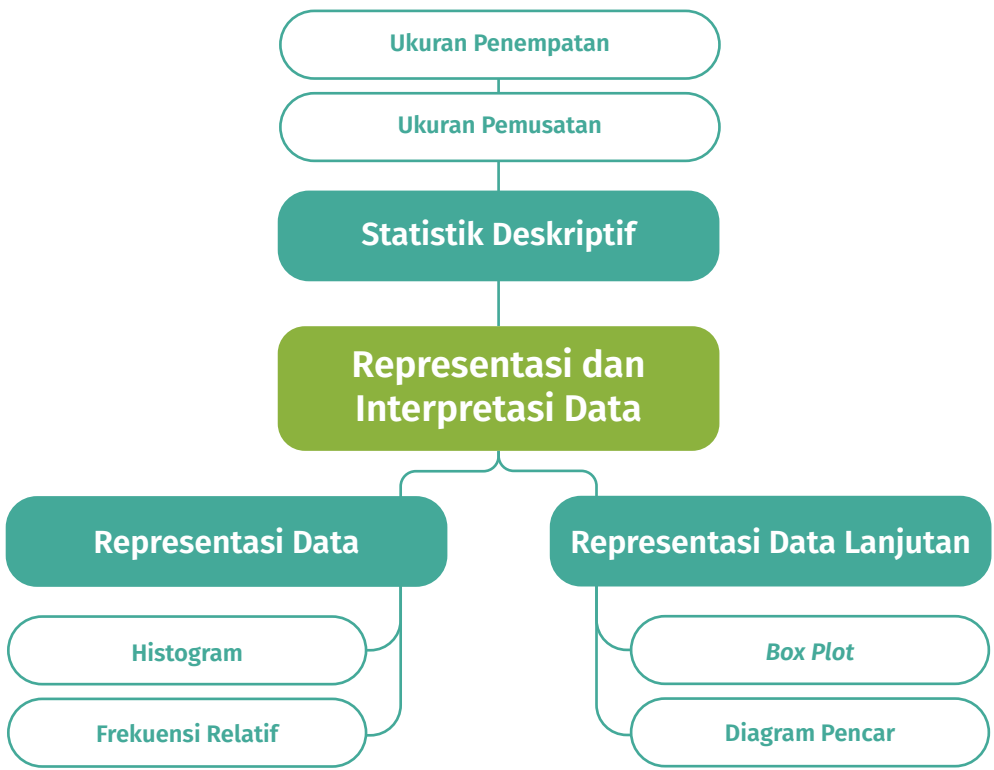
Tujuan Pembelajaran

Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kamu dapat merepresentasikan data dalam berbagai bentuk grafik dan menganalisisnya, menentukan grafik mana yang sesuai dengan jenis data yang ingin ditampilkan serta mampu menghitung ukuran pemusatan dan ukuran penyebaran dari suatu kelompok data serta menggunakannya untuk membandingkan dua kelompok.

Kata Kunci

- histogram
- *mean*
- median
- modus
- kuartil
- box plot
- diagram pencar

Peta Materi



Dalam kehidupan sehari-hari, kita selalu berhubungan dengan data. Pernahkah kamu melihat kumpulan data, atau pernahkah kamu mengumpulkan data? Saat pandemi Covid-19, kita dapat melihat data berapa banyak orang yang terkena infeksi karena virus korona. Dari data harian yang kita kumpulkan, kita dapat melakukan analisis sederhana, seperti daerah mana yang tingkat penularannya sudah makin turun, mana daerah yang justru tingkat penularannya semakin naik. Selain itu, kita juga dapat melihat berapa rata-rata tingkat kesembuhan dari pasien Covid-19 setiap harinya. Untuk dapat menarik kesimpulan dari hal-hal di atas, kita memerlukan data lalu mengolahnya sehingga kita dapat memahami situasi yang sesungguhnya berdasarkan fakta yang aktual, bukan berdasarkan perasaan atau berita hoaks.

Sebagai contoh, ketika vaksin Covid-19 berhasil ditemukan di beberapa negara, muncul berita hoaks yang menyebutkan bahwa vaksin tersebut bermasalah. Dari data yang berhasil dikumpulkan dan diolah, ternyata dari setiap 40.000 orang yang divaksin, rata-rata akan ada 5 orang atau sekitar 0,01% yang mengalami masalah. Hal ini disebabkan berbagai hal seperti usia lanjut, penyakit bawaan, dan sebagainya. Sementara itu, diketahui bahwa rata-rata tingkat kematian dari pasien Covid-19 yang tidak sempat divaksin di Indonesia mencapai 3%, atau jika ada 6.000 pasien baru, maka diperkirakan rata-rata 200 pasien akan berakhir dengan kematian. Dari fakta ini kita dapat melihat bahwa persentase pasien Covid-19 yang tidak divaksin 300 kali lebih berisiko daripada persentase orang yang bermasalah karena vaksin. Wow! 300 kali lebih berisiko tanpa vaksin. Jumlah yang tidak sedikit. Jadi, dengan melihat data tersebut kita dapat memahami situasi dengan lebih baik sehingga kita mampu mengambil keputusan dengan lebih tepat.

Statistik adalah ilmu yang akan membantumu menguasai berbagai hal yang terkait dengan data, mulai dari pengumpulan data, mengolahnya, menganalisis sampai akhirnya mengambil keputusan berdasarkan data. Pada waktu SMP, kamu telah belajar bagaimana untuk melihat ukuran pemusatan dari sekumpulan data, kamu mencari rata-rata atau *mean*, modus, dan median. Saat ini, kamu akan mempelajari jenis data, ukuran penyebaran serta ukuran lokasi dari sekumpulan data supaya kamu dapat menarik kesimpulan dengan lebih baik.

A. Representasi Data



Ayo, Mengingat Kembali

1. Diagram lingkaran sederhana atau diagram batang sederhana dapat digunakan untuk menampilkan informasi yang tersedia, baik dalam bentuk data tunggal maupun dalam bentuk tabel frekuensi.
2. Dari data tunggal sederhana atau data dalam tabel distribusi frekuensi, dapat diperoleh ukuran pemusatan: *mean*, modus, dan median yang dapat memberikan gambaran tentang kumpulan data tersebut.

Eksplorasi 6.1 Penggunaan Diagram Batang untuk Menganalisis Data



Ayo, Bereksplorasi

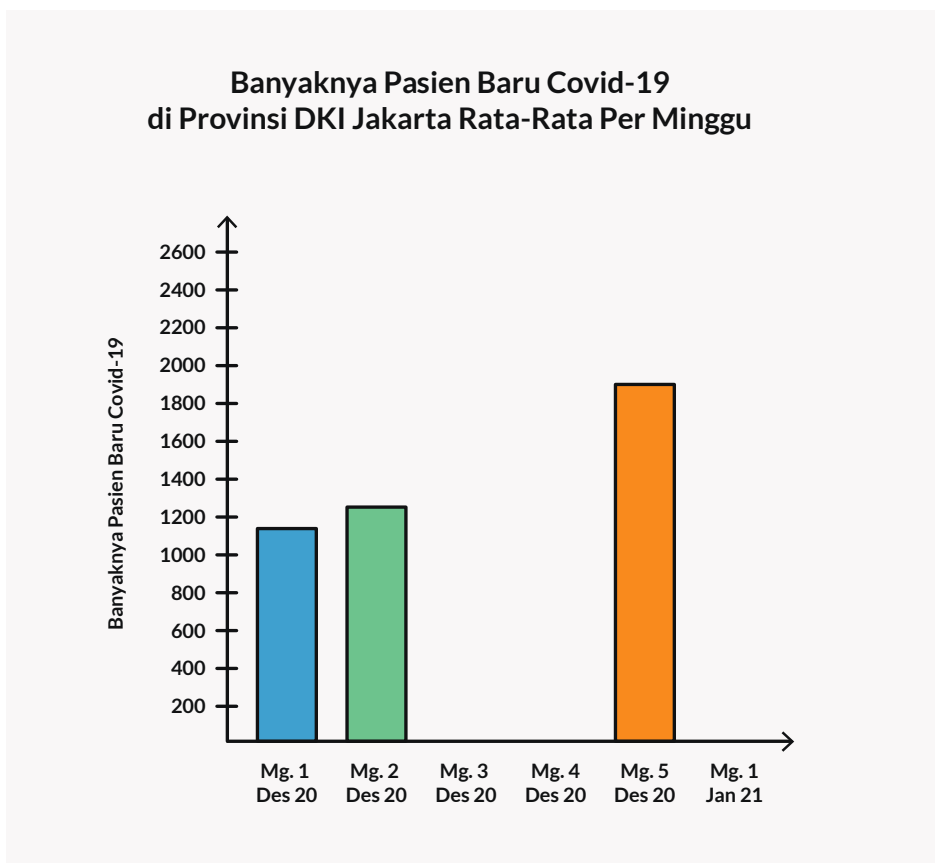
Pandemi Covid-19 melanda seluruh dunia pada tahun 2020. Setiap harinya jumlah pasien yang terinfeksi virus Covid-19 terus bertambah. Pada tabel berikut, kamu dapat melihat rata-rata pertambahan pasien baru positif Covid-19 setiap minggunya di Provinsi DKI Jakarta.

Tabel 6.1 Frekuensi Banyaknya Pasien Baru Covid-19

Tanggal	Banyaknya Pasien Baru Positif Covid-19*
Minggu ke-1 Desember 2020	1.170
Minggu ke-2 Desember 2020	1.220
Minggu ke-3 Desember 2020	1.520
Minggu ke-4 Desember 2020	1.830
Minggu ke-5 Desember 2020	1.900
Minggu ke-1 Januari 2021	2.120

*jumlah dibulatkan ke puluhan terdekat. Sumber: corona.jakarta.go.id

1. Dari **Tabel 6.1**, pada minggu ke berapakah yang mengalami rata-rata kenaikan jumlah pasien positif Covid-19 yang paling besar?
2. Berdasarkan **Tabel 6.1**, lengkapilah diagram batang di bawah ini.



Ayo, Berdiskusi

Setiap siswa memberikan estimasinya disertai alasannya.

3. Jika pola penambahan rata-rata mingguan jumlah pasien positif Covid-19 ini terus bertambah, berikan estimasimu untuk jumlah pasien positif Covid-19 pada minggu ke-2 Januari 2021. Jelaskan alasanmu!



Ayo, Berpikir Kritis

Pemilihan grafik yang tepat akan memberikan gambaran yang lebih tepat.

4. Saat menentukan kenaikan jumlah pasien Covid-19 yang paling besar, manakah yang lebih mudah digunakan, tabel atau diagram batang? Jelaskan!

1. Histogram

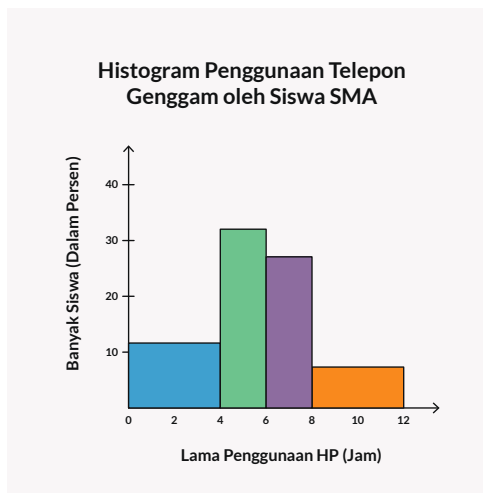
Ada berbagai tipe diagram. Diagram mana yang paling baik untuk digunakan sangat tergantung pada data apa yang kamu miliki dan informasi apa yang ingin kamu sampaikan.

Salah satu diagram yang dapat kamu gunakan adalah histogram. Histogram hampir serupa dengan diagram batang, namun histogram berbeda dengan diagram batang. **Gambar 6.1** dan **6.2** menunjukkan contoh histogram dan diagram batang.

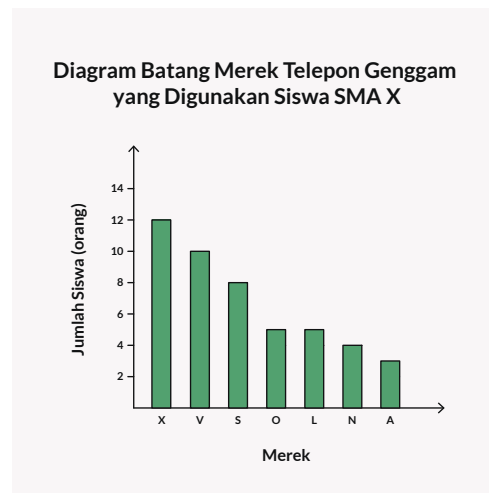


Ayo, Berdiskusi

Dari **Gambar 6.1** dan **Gambar 6.2**, carilah perbedaan dari histogram dan diagram batang.



Gambar 6.1 Histogram Penggunaan Telepon Genggam oleh Siswa SMA



Gambar 6.2 Diagram Batang Merek Telepon Genggam yang digunakan Siswa SMA

Histogram biasanya digunakan untuk menunjukkan distribusi dari suatu kelompok data, sedangkan diagram batang digunakan untuk membandingkan data. Histogram menampilkan data yang sifatnya

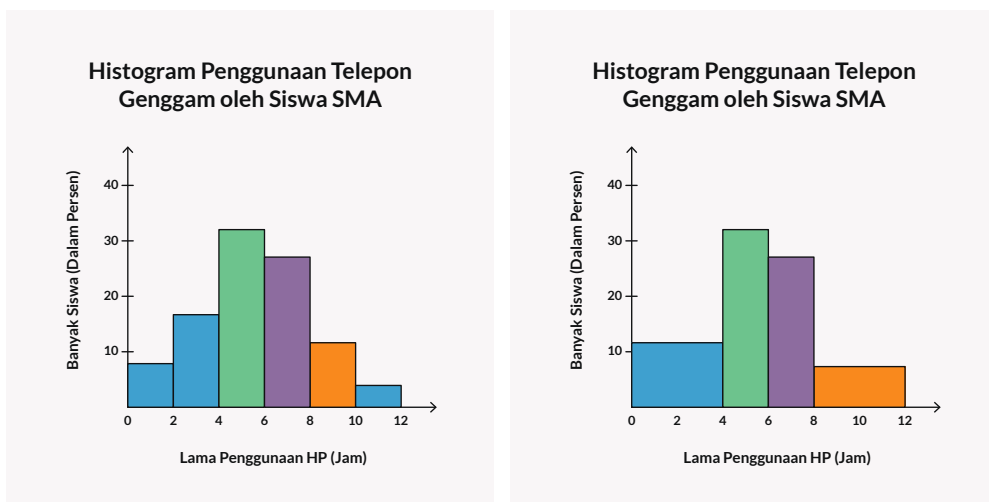
kuantitatif dengan rentang data yang dikelompokkan ke dalam interval, sedangkan diagram batang menampilkan data yang sifatnya kategori.

Perbedaan lainnya, pada histogram, gambar batang menempel satu sama lain, sedangkan pada diagram batang, ada spasi antarbatang. Perbedaan terakhir, diagram batang biasanya memiliki batang dengan lebar yang sama, sedangkan lebar batang dalam histogram tidak perlu sama selama luas totalnya seratus persen jika digunakan persen atau luas total sama dengan jumlah data. Oleh karena itu, frekuensi data dalam diagram batang dilihat dari panjang batang, sedangkan frekuensi dalam histogram diberikan berdasarkan area pada masing-masing batang.



Ayo, Berdiskusi

Perhatikan **Gambar 6.3**. Kedua histogram menampilkan data yang sama. Cobalah mencari bagaimana kedua histogram ini menjelaskan data yang sama walaupun terlihat berbeda.



Gambar 6.3 Tampilan Data yang Sama Menggunakan Dua Histogram yang Berbeda

Kamu dapat menggunakan pendekatan luas persegi panjang dalam menggambar histogram.

Pada histogram sebelah kiri:

- Frekuensi Kelas 0–2 adalah 8, luas persegi panjangnya adalah $2 \times 8 = 16$
- Frekuensi Kelas 2–4 adalah 16, luas persegi panjangnya adalah $2 \times 16 = 32$

- Luas gabungan kedua kelas tersebut adalah $16 + 32 = 48$

Pada histogram sebelah kanan:

- Frekuensi Kelas 0–4 adalah 12, luas persegi panjangnya adalah $4 \times 12 = 48$

Jadi, kelas 0–2 dan 2–4 pada histogram kiri memiliki luas yang sama dengan kelas 2–4 pada histogram kanan, sehingga dapat dikatakan bahwa histogram kiri dan histogram kanan menjelaskan data yang sama.

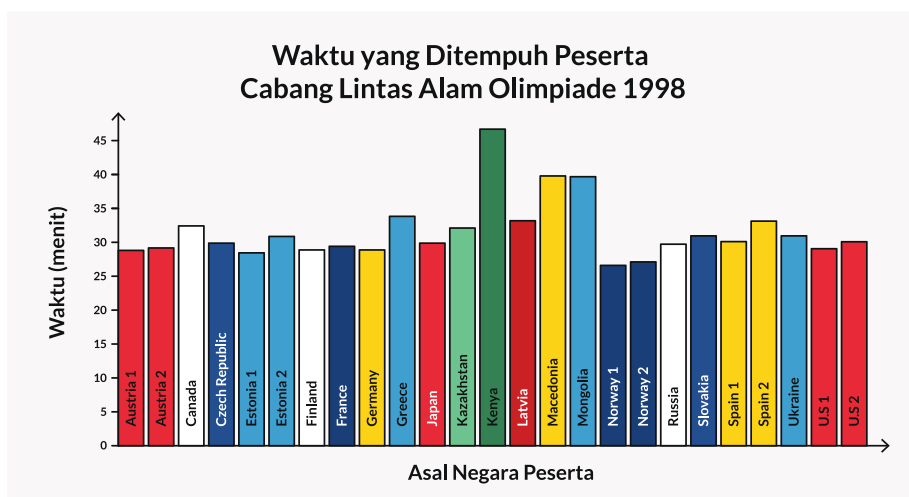


Ayo, Mencoba

Coba kamu buktikan mengapa kelas 8–10 dan kelas 10–12 pada histogram kiri dapat digabung menjadi kelas 8–12 pada histogram kanan. Jelaskan jawabanmu.

Latihan 6.1

1. Perhatikan diagram batang berikut. Diagram berikut menunjukkan waktu yang ditempuh oleh para atlet di Olimpiade 1998 cabang Lintas Alam 10 km.



Gambar 6.4 Diagram Batang Waktu yang Ditempuh Peserta Lintas Alam Olimpiade 1998

Sumber: <https://www.olympic.org/nagano-1998/cross-country-skiing>

- a. Dari **Gambar 6.4**, ada berapa atlet yang berpartisipasi dalam cabang lintas alam? Ada berapa negara yang berpartisipasi dalam cabang ini?



Ayo, Berpikir Kritis

Untuk dapat memahami diagram dengan lebih baik, kamu perlu memahami situasi dan konteks dari diagram.

- b. Peserta dari negara manakah yang mendapatkan medali emas? Berapakah catatan waktunya?
- c. Berapakah atlet yang menyelesaikan lomba ini dengan interval catatan waktu antara 31 menit dan 32 menit 59 detik?



Ayo, Berpikir Kreatif

Ayo berpikir kreatif dalam menyesuaikan tampilan diagram batang untuk menjawab permasalahan.

- d. **Gambar 6.4** disusun berdasarkan abjad dari nama depan asal negara atlet. Pikirkanlah cara lain untuk menyusun diagram batang ini. Pertanyaan seperti apakah yang mudah untuk dijawab dari susunan diagram batang yang baru tersebut?

Saat menjawab soal bagian c) di atas, mungkin kamu memerlukan waktu yang lebih lama karena harus melihat catatan waktu dari tiap atlet peserta. Meskipun kamu mudah membaca catatan waktu dari tiap atlet, tidak terlalu mudah untuk menemukan banyaknya atlet yang menyelesaikan lomba dengan interval catatan waktu tertentu.

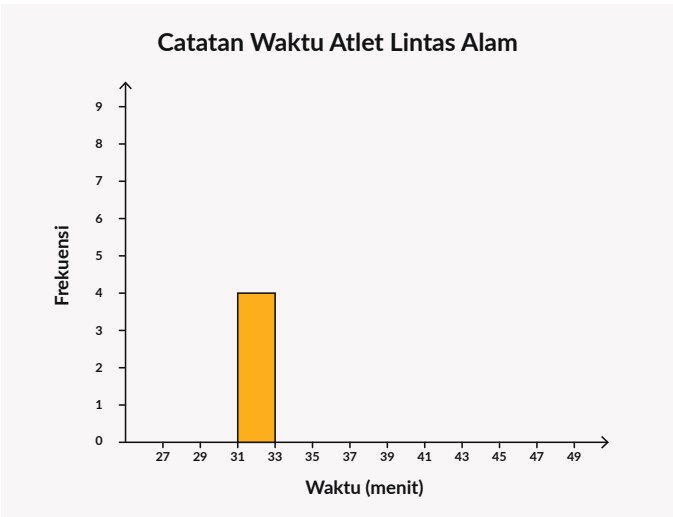
Sekarang, kamu akan menggunakan histogram untuk menampilkan data catatan waktu dari para atlet. Dalam histogram, data dibagi ke dalam interval yang sama, dengan 1 gambar batang untuk setiap interval. Tinggi dari setiap batang menunjukkan banyaknya data yang masuk dalam interval tersebut.

2. Dari data catatan waktu para atlet cabang Lintas Alam pada **Gambar 6.4**, selesaikan soal berikut.
- a. Lengkapilah kolom Frekuensi pada **Tabel 6.2**.

Tabel 6.2 Tabel Distribusi Frekuensi Catatan Waktu Atlet

Catatan Waktu Atlet (menit:detik)	Frekuensi
27:00–28:59	
29:00–30:59	
31:00–32:59	
33:00–36:59	
37:00–38:59	
39:00–40:59	
41:00–42:59	
43:00–44:59	
45:00–46:59	
47:00–48:59	

- b. Buatlah histogram yang menunjukkan banyaknya atlet yang menyelesaikan lomba Lintas Alam dalam tiap interval catatan waktu. Satu batang untuk interval waktu 31:00–32:59 telah digambar pada histogram di bawah ini.



- c. Interval waktu manakah yang memiliki jumlah atlet paling banyak?
- d. Bentuk dari susunan batang-batang pada histogram menunjukkan distribusi dari data-data yang ada. Distribusi data menunjukkan bagaimana data tersebar, seperti di mana kebanyakan data berada, di mana tidak ditemui data apa pun, dan di mana data sangat sedikit. Apa yang dapat kamu simpulkan dari distribusi data catatan waktu para atlet pada **Tabel 6.2**?

2. Frekuensi Relatif

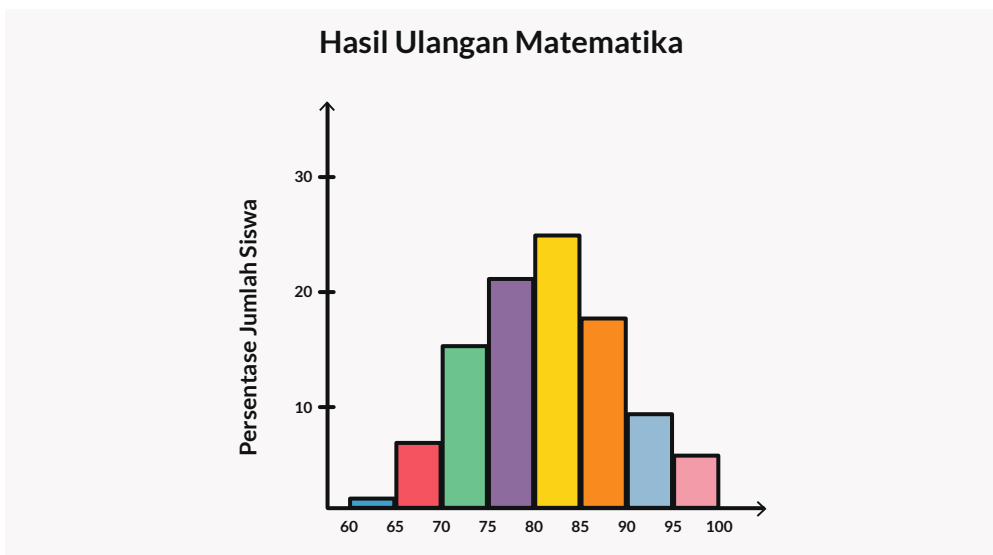
Frekuensi pada histogram tidak harus selalu menunjukkan banyaknya data yang ada dalam setiap interval. Histogram juga dapat menggunakan persentase sebagai frekuensi relatif dari setiap kelas intervalnya.

Eksplorasi 6.2 Frekuensi Relatif dalam Histogram



Ayo, Bereksplorasi

Ayo, berdiskusi dengan menjawab pertanyaan berikut.



Gambar 6.5 Histogram Hasil Nilai Ulangan Matematika

Dari histogram pada **Gambar 6.5**, ditunjukkan bahwa ada 16% siswa yang mendapatkan nilai matematika antara 70 sampai 75.

- Apakah ini berarti ada 16 siswa yang berada di kelas tersebut? Jelaskan.
- Interval kelas manakah yang memiliki persentase terbesar? Berapa persen kelas dengan interval tersebut?

Misalkan ada 200 siswa yang mengikuti ulangan matematika tersebut. Berapakah banyaknya siswa yang mendapatkan nilai 85 ke atas tapi di bawah 90?

Apabila kamu menambahkan seluruh persen pada setiap interval, berapakah seharusnya jumlah total persen yang kamu peroleh? Jelaskan.

Histogram dengan frekuensi relatif sangat efektif jika digunakan untuk membandingkan dua kelompok data dengan jumlah data yang berbeda, misalnya, jika kamu ingin membandingkan data harian berapa persen penduduk di Jakarta dengan penduduk di Bali yang telah sembuh dari Covid-19. Karena jumlah total penduduk yang terinfeksi Covid-19 di Jakarta berbeda dengan Bali, maka penggunaan persentase sebagai frekuensi relatif memberikan gambaran yang lebih baik.

Latihan 6.2



Ayo, Bekerja Sama

Ayo, bekerja sama dalam melengkapi tabel di bawah ini agar waktu yang diperlukan menjadi lebih sedikit.

1. Kamu pernah belajar mengenai perkalian dari 0×0 sampai 12×12 . Lengkapilah tabel perkalian di bawah ini.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0													
1													
2													
3													
4													

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													

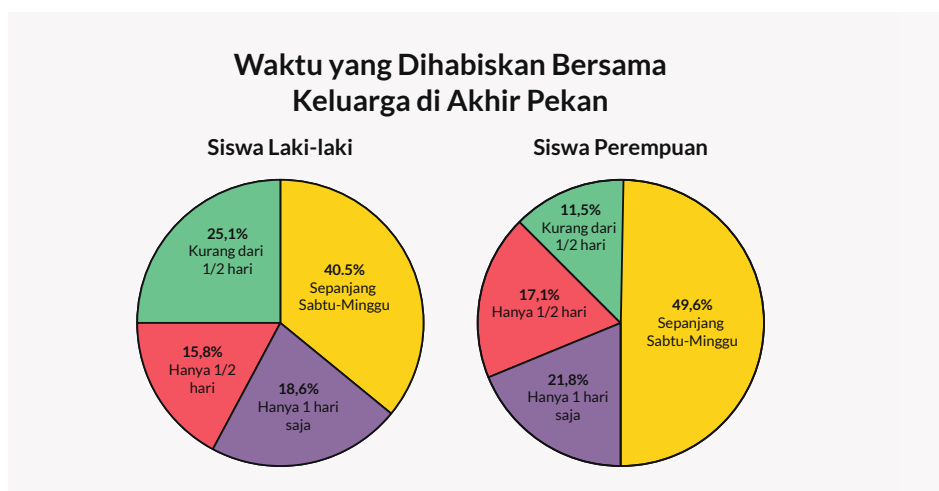
Kamu dapat membuat kelompok hasil perkalian di atas dengan mengelompokkan ke dalam kelas-kelas dengan panjang kelas 10. Sebagai contoh, kelas pertama adalah kelas 0–9, kelas kedua: 10–19, kelas ketiga: 20–29, dan seterusnya sampai kelas: 140–149.

- Buatlah tabel frekuensi dengan panjang kelas 10.
 - Lalu gambarlah histogramnya.
 - Menurutmu, apakah hasil kali tersebut akan terdistribusi merata ke setiap kelas yang panjang kelasnya 10? Atau apakah ada kelas tertentu yang memiliki hasil kali lebih banyak dari kelas lainnya?
 - Sekarang buatlah histogram lainnya dengan panjang kelas 20, dimulai dari 0–19, 20–39, 40–59, dan seterusnya.
 - Jelaskanlah persamaan dan perbedaan dari kedua histogram yang kamu hasilkan.
- Dari sebuah survei terhadap siswa SMP mengenai berapa banyak waktu yang mereka habiskan bersama orang tua mereka di akhir pekan, diperoleh hasil survei sebagai berikut.

Tabel 6.3 Waktu yang Dihabiskan Siswa di Akhir Pekan

Waktu yang Dihabiskan Bersama Keluarga di Akhir Pekan	Siswa Laki-Laki (persen)	Siswa Perempuan (persen)
Sepanjang Sabtu dan Minggu	40,5	49,6
Hanya di salah satu hari saja	18,6	21,8
Hanya $\frac{1}{2}$ hari saja	15,8	17,1
Kurang dari $\frac{1}{2}$ hari	25,1	11,5

Jika kamu ingin membandingkan hasil survei siswa laki-laki dengan hasil survei siswa perempuan, kamu dapat menampilkannya dalam 2 buah diagram lingkaran.



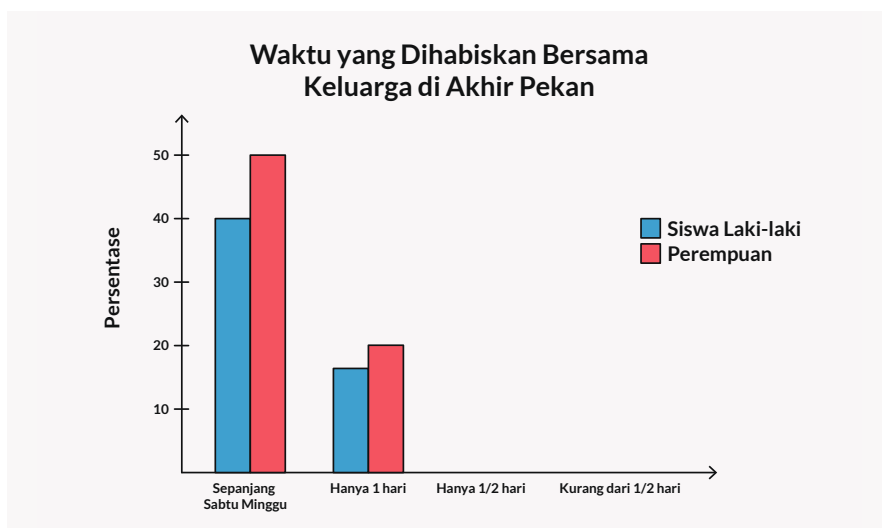
Gambar 6.6 Perbandingan Diagram Lingkaran Siswa Laki-Laki dan Perempuan



Ayo, Berpikir Kritis

- Mengapa data yang ditampilkan dalam bentuk persentase?
- Kamu juga dapat menampilkan data-data di atas dalam grafik batang ganda, yang dalam setiap kategori memiliki 2 batang, yang satu menunjukkan persentase banyaknya siswa laki-laki di kategori tersebut dan yang lainnya menunjukkan persentase siswa perempuan.

Lengkapilah diagram batang berikut.



Gambar 6.7 Diagram Batang Ganda Waktu Akhir Pekan Siswa



Ayo, Berpikir Kritis

Dengan memilih representasi grafik yang tepat, akan memudahkan kita dalam membandingkan 2 kelompok data.

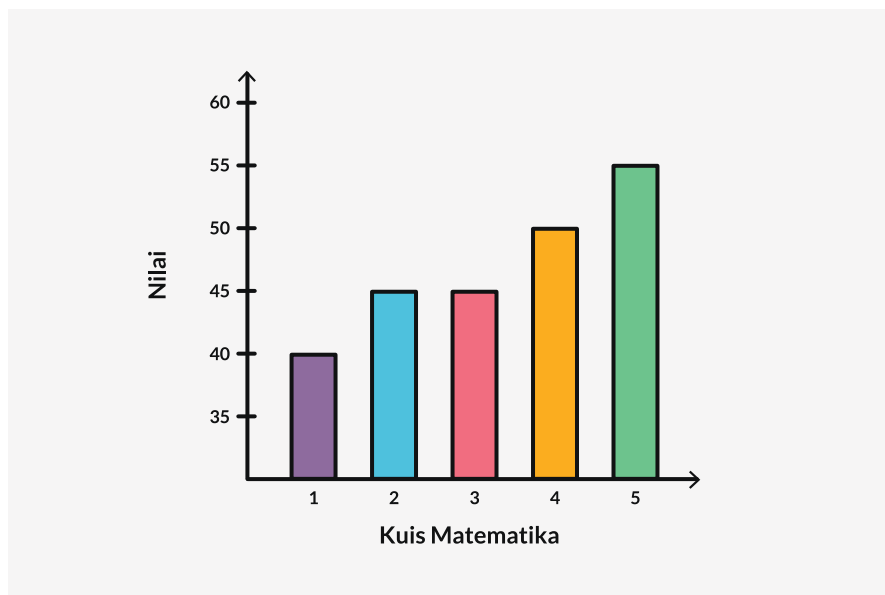
- c. Menurutmu, diagram manakah yang lebih mudah digunakan untuk membandingkan 2 kelompok data? Berikan alasan dari pilihanmu.
3. Dani sering bermain *games online* sehingga nilai kuis matematikanya jelek. Orang tua Dani melarang Dani untuk bermain *games online* sampai hasil nilai kuis matematika Dani berubah secara signifikan. Guru matematika Dani setiap minggu memberikan kuis matematika dengan nilai tertinggi 100. Dani membuat grafik batang untuk menunjukkan kepada orang tuanya bahwa nilai kuisnya sudah membaik dalam 5 minggu terakhir.



Ayo, Berpikir Kritis

- a. Panjang batang nilai kuis 5 Dani tiga kali lebih tinggi dari panjang batang nilai kuis 1-nya. Apakah nilai kuis 5-nya tiga kali dari nilai kuis 1-nya?

- b. Orang tua Dani mengatakan bahwa grafik batang yang dibuat Dani menyesatkan karena dari grafik ini terlihat ada perbaikan signifikan dari nilai kuis Dani dibandingkan dengan kenyataannya. Hal manakah pada grafik ini yang menyebabkan grafik ini memberikan kesimpulan yang salah?



Gambar 6.8 Diagram Batang Buatan Dani



Penguatan Karakter

- c. Buatlah diagram batang yang baru yang dapat memberikan hasil yang lebih akurat dan menggambarkan performa Dani yang sebenarnya di kuis matematika mingguan.



Ayo, Berefleksi

Dalam subbab ini, kamu sudah belajar mengenai diagram batang dan histogram. Selain itu, kamu juga telah mengenal frekuensi dan frekuensi relatif dalam diagram batang dan histogram.

1. Apa saja perbedaan diagram batang dengan histogram?
2. Kapan kita sebaiknya menggunakan frekuensi relatif daripada frekuensi?

B. Statistik Deskriptif

1. Ukuran Pemusatan

a. Modus dan Median

Modus dan median adalah dua ukuran pemusatan untuk melihat kecenderungan kumpulan data.

Median adalah nilai data yang berada tepat di tengah ketika seluruh data diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar. Untuk mencari letak median, bagilah banyaknya data dengan 2.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m , maka median terletak di tengah-tengah antara urutan ke- m dan ke- $(m + 1)$.
- Jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka median terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Modus dari sebuah kumpulan data adalah data yang paling sering muncul atau memiliki frekuensi paling besar. Kedua ukuran pemusatan ini memiliki keuntungan, yaitu tidak terpengaruh jika kumpulan data memiliki data pencilan atau data yang berbeda dari kumpulan datanya.

Selain modus dan median, kamu dapat melihat rentang dari kumpulan data melalui *range* atau jangkauan. **Jangkauan** adalah selisih antara data terkecil dengan data terbesar.

Eksplorasi 6.3 Dot Plot



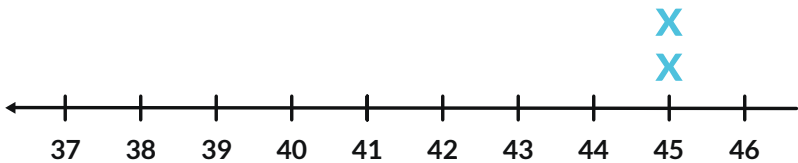
Ayo, Bereksplorasi

Basket merupakan olahraga yang digandrungi banyak siswa SMA/MA, khususnya pria. Untuk dapat bermain basket, kamu perlu menggunakan sepatu olahraga. Berikut adalah data penjualan sepatu olahraga di toko A yang terdiri atas beberapa merek dan ukuran pada akhir pekan pertama bulan Januari.

Tabel 6.4 Data Penjualan Sepatu di Toko A

No	Merek	Ukuran	No	Merek	Ukuran
1.	A	43	14.	A	44
2.	B	44	15.	C	40
3.	C	38	16.	D	41
4.	A	43	17.	B	42
5.	C	44	18.	D	43
6.	D	42	19.	E	42
7.	A	42	20.	A	40
8.	A	39	21.	A	45
9.	B	43	22.	C	41
10.	E	43	23.	A	41
11.	C	44	24.	A	42
12.	E	45	25.	C	43
13.	B	44			

1. Buatlah Diagram Dot Plot untuk menunjukkan ukuran sepatu yang terjual pada akhir pekan pertama bulan Januari. Diagram Dot Plot adalah sebuah garis bilangan dengan banyaknya tanda X yang menunjukkan banyaknya data yang muncul dengan nilai tertentu. Sebagai contoh, 45 muncul dua kali. Jadi, kamu tuliskan tanda X di atas angka 45.



Gambar 6.9 Dot Plot Ukuran Sepatu

2. Jelaskan bentuk dari Dot Plot yang kamu hasilkan. Bagaimana bentuk Dot Plot ini dapat menjelaskan distribusi data ukuran sepatu di atas? Ketika kamu mendeskripsikan sebuah kumpulan data, biasanya kamu juga perlu menentukan data terkecil dan data terbesar dari kumpulan data tersebut.

3. Tentukanlah data terkecil dan data terbesar dari kumpulan data ukuran sepatu yang terjual.
4. Bagaimana kamu dapat menemukan data terkecil dan data terbesar dengan melihat Diagram Dot Plot?
5. Tentukanlah jangkauan dari data ukuran sepatu pada **Tabel 6.4**.
6. Tentukanlah modus dari data ukuran sepatu pada **Tabel 6.4**.
7. Bagaimana kamu dapat menentukan modus sekumpulan data dari Diagram Dot Plot?
8. Urutkanlah data ukuran sepatu di atas dari yang terkecil sampai yang terbesar, lalu tentukanlah mediannya.
9. Bagaimana kamu dapat menentukan median dari sekumpulan data dengan melihat Diagram Dot Plot?



Ayo, Berdiskusi

Jika terjadi penambahan data baru, bagaimana modus, median, dan jangkauan akan terpengaruh?

10. Ternyata ada data penjualan di toko sepatu A yang tertinggal. Data-data tersebut adalah 41, 43, 44, 44, dan 46. Berapakah nilai dari jangkauannya sekarang? Berapakah modusnya sekarang?



Ayo, Berdiskusi

Bagaimana perbedaan mencari median pada kelompok dengan banyaknya data ganjil dan genap?

11. Ketika banyaknya data adalah bilangan genap, maka tidak ada data yang diambil sebagai median tunggal. Dalam hal ini, median diambil dari nilai tengah di antara dua nilai data yang berada di tengah. Carilah median dari kumpulan data yang baru.

b. Mean (Rerata atau Rata-Rata)

Rerata atau *mean* adalah ukuran pemusatan lain selain median dan modus. *Mean* dari sebuah kumpulan data adalah bilangan yang diperoleh dengan mendistribusikan secara merata ke seluruh anggota dari kumpulan data. Kamu dapat menghitung *mean* dengan cara menambahkan seluruh nilai data dan membagi dengan total banyaknya data.

Atau jika ditulis dalam bentuk formula: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ dengan:

$\bar{x}$ adalah *mean*, dibaca x bar. $\sum x$ menyatakan jumlah total data dan n menunjukkan banyaknya data.

Eksplorasi 6.4 Mean



Ayo, Bereksplorasi

OSIS Sekolah A yang beranggotakan 10 orang akan melakukan aksi sosial untuk membantu para korban bencana alam. Mereka sepakat untuk mengumpulkan pakaian bekas layak pakai untuk membantu para korban bencana alam. Adapun jumlah baju yang dikumpulkan setiap pengurus OSIS adalah sebagai berikut.

3 5 7 10 5 3 4 6 9 8

1. Tentukanlah nilai *mean*, median, dan modus dari jumlah baju yang dikumpulkan oleh para pengurus tersebut.



Ayo, Berdiskusi

Bagaimana penambahan data berpengaruh terhadap ukuran pemusatan?

2. Keesokan harinya, ada dua siswa yang bukan pengurus OSIS, namun mereka terinspirasi dengan aksi sosial yang dilakukan oleh para pengurus OSIS. Mereka langsung ikut menyumbangkan baju layak pakai sebanyak 20 dan 22 buah. Tentukan *mean*, median, dan modus dari kumpulan data yang baru.

c. Penggunaan Ukuran Pemusatan

Setelah kamu mempelajari cara menentukan *mean*, median, dan modus, maka hal yang juga penting adalah mengetahui karakteristik dari setiap ukuran pemusatan ini, agar kita dapat memilih ukuran pemusatan mana yang paling tepat sesuai dengan konteks permasalahan.

Eksplorasi 6.5 Memilih Ukuran Pemusatan



Ayo, Bereksplorasi

Masih dari kisah para pengurus OSIS Sekolah A sebelumnya. Bagaimana hasil pengamatanmu setelah membandingkan *mean*, median, dan modus data sumbangan 10 pengurus OSIS dengan *mean*, modus dan median data sumbangan ke-12 siswa?

Di antara *mean*, median, dan modus, manakah nilai yang tetap? Manakah nilai yang berubah? Jelaskan.



Ayo, Berdiskusi

Cobalah berpikir ekstrem dengan mengganti 1 data dengan nilai yang sangat berbeda, lalu amati perubahannya.

Bagaimana jika seandainya siswa ke-12 bukan menyumbang 22 buah, tetapi menyumbang 100 pakaian. Menurutmu, tanpa menghitung dahulu *mean*, median, dan modus yang baru, manakah di antara *mean*, median, dan modus yang nilainya berubah? Manakah yang nilainya tetap? Jelaskan.

Sekarang cobalah kamu menghitung *mean*, median, dan modus yang baru. Apakah analisis kamu di atas sudah benar?

Modus	Digunakan ketika jenis data adalah data kualitatif, atau jenis data kuantitatif yang memiliki 1 modus atau 2 modus (bimodal).
Median	Digunakan untuk jenis data kuantitatif. Biasanya median digunakan ketika ada data yang memiliki nilai yang ekstrem (pencilan), sehingga data ekstrem tersebut tidak memiliki dampak yang besar seperti pada <i>mean</i> .
Mean	Digunakan untuk jenis data kuantitatif dan menggunakan seluruh data. Namun, <i>mean</i> terpengaruh oleh data dengan nilai yang ekstrem.

d. Mean (Rata-Rata) Data Kelompok

Data penjualan sepatu di toko A pada **Tabel 6.4** merupakan kumpulan data tunggal. Kalian dapat mengelompokkan data-data ini menjadi data kelompok dengan panjang kelas sama dengan 2 sehingga menjadi tabel frekuensi data kelompok sebagai berikut.

Tabel 6.5 Distribusi Frekuensi Data Kelompok Penjualan Sepatu di Toko A

Ukuran	37–39	40–42	43–45	46–48
Frekuensi	2	11	16	1

Cara menghitung rata-rata dari data kelompok di atas adalah menggunakan nilai tengah dari tiap kelompok. Data tunggal dalam kelompok diasumsikan tersebar secara merata, sehingga nilai tengah dari setiap kelompok dapat diasumsikan mewakili kelompok tersebut.

Nilai tengah kelompok 37–39 adalah 38, Nilai tengah kelompok 40–42 adalah 41, Nilai tengah kelompok 43–45 adalah 44, dan Nilai tengah kelompok 46–48 adalah 47.

Rata-rata dari kelompok di atas:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x}{n} = \frac{(2 \times 38) + (11 \times 41) + (16 \times 44) + (1 \times 47)}{2 + 11 + 16 + 1} \\ &= \frac{1278}{30} = 42,6 \end{aligned}$$



Ayo, Berdiskusi

Bagaimana rata-rata data tunggal dibandingkan dengan rata-rata data kelompok? Apakah masih bisa merepresentasikan kelompok data?

Bandingkanlah hasil rata-rata data kelompok ini dengan hasil rata-rata data tunggal dari penjualan sepatu di toko A. Apakah menurutmu, kedua hasil rata-rata masih cukup dekat?

Latihan 6.3

1. Jika data penjualan sepatu di toko A pada **Tabel 6.4** kita ubah menjadi tabel Frekuensi data tunggal sebagai berikut.

Tabel 6.6 Tabel Frekuensi Data Tunggal Penjualan Sepatu di Toko A

Ukuran	38	39	40	41	42	43	44	45	46
Frekuensi	1	1	2	4	5	7	7	2	1

- a. Tentukanlah modus, median, dan *mean* dari kumpulan data di atas.
 - b. Untuk menentukan rencana pemesanan sepatu bulan depan, jelaskan mengapa pemilik toko sebaiknya menggunakan modus.
2. Data berikut menunjukkan jumlah kue yang dijual melalui situs *online* setiap harinya:

0 3 2 7 4 2 3 0 4 0 6 5 5 2 4 0

- a. Tentukanlah modus dan median dari data di atas.
- b. Menurutmu, ukuran pemusatan manakah yang lebih untuk data di atas, modus atau median? Jelaskan.



Ayo, Berpikir Kreatif

3. Buatlah kumpulan data dengan banyaknya data, ada sebanyak 13 buah dan memenuhi kondisi:
 - Data terkecil = 3
 - Data terbesar = 13
 - Modus = 4, dan
 - Median = 8
4. Dari 2 kelas siswa SD di sekolah “Pancasila” diperoleh data tinggi siswa (dalam cm) sebagai berikut:
 - Kelas A: 117, 117, 119, 122, 127, 127, 104, 137, 99, 107, 114, 127, 122, 114, 120, 125, 119
 - Kelas B: 130, 147, 137, 142, 140, 135, 135, 142, 142, 137, 135, 132, 135, 120, 119, 125, 142
 - a. Untuk masing-masing kelas, buatlah grafik Box Plot.
 - b. Tentukanlah *range*, modus, dan median dari setiap kelas.
 - c. Kedua kelas berasal dari tingkat yang berbeda. Kelas manakah menurutmu yang memiliki tingkat yang lebih tinggi?
 - d. Berapa persen siswa dari kelas B yang memiliki tinggi sama atau lebih tinggi dari median tinggi badan siswa kelas A?
5. Pernahkah kamu mendengar bahwa Indonesia adalah salah satu paru-paru dunia? Hutan tropis di Indonesia memiliki peranan yang sangat penting untuk memberikan sumbangan terhadap lingkungan dunia. Pohon Borneo adalah salah satu jenis pohon yang banyak ditemukan di hutan Kalimantan.

Tabel 6.7 Tabel Frekuensi Data Kelompok Diameter Pohon Borneo di Daerah A

Diameter Pohon Borneo (cm)	19–21	22–24	25–27	28–30
Frekuensi	4	17	25	14

- a. Tentukanlah kelas modus.
- b. Prediksi nilai *mean* dari data kelompok di atas.
- c. Tentukan kelas median.



Ayo, Berefleksi

Dalam subbab ini, kamu sudah belajar mengenai ukuran pemusatan: *mean*, median, dan modus. Kamu juga telah menentukan manakah ukuran pemusatan yang sesuai.

1. Ukuran pemusatan manakah yang terpengaruh dengan pencilan? Manakah yang tidak terpengaruh pencilan?
2. Saat data tunggal dikelompokkan, lalu kamu menghitung *mean* data tunggal dan *mean* data kelompok, bagaimana hasil dari kedua *mean* tersebut? Apakah berbeda jauh atau berbeda sedikit?

e. Median dan Kelas Modus Data Kelompok

Eksplorasi

6.6

Membandingkan Modus dan Median Data Tunggal dengan Data Kelompok



Ayo, Bereksplorasi

Kita masih akan menggunakan data penjualan sepatu di toko A pada **Tabel 6.5** yang merupakan Tabel Distribusi Data Kelompok. Sekarang, mari kita bandingkan modus. Pada data tunggal, kelompok data ini memiliki dua modus atau disebut bimodal, yaitu 43 dan 44 karena kedua data tersebut memiliki frekuensi yang paling tinggi yaitu 7.

Pada data kelompok, kita dapat melihat bahwa kelas modus adalah kelas 43–45 yaitu dengan frekuensi 16. Jadi, walaupun data tunggal diubah ke dalam data kelompok, ternyata kelas modus tetap dapat memberikan gambaran estimasi di mana data modus berada.

Bagaimana dengan median?

Untuk data tunggal, karena jumlah data ada sebanyak 30 data, maka karena 30 dibagi 2 adalah 15, sehingga median terletak di antara data ke-15 dan data ke-16. Data yang terletak di urutan ke-15 adalah 43 dan data di urutan ke-16 adalah 43. Maka median dari kelompok data tunggal adalah $\frac{43 + 43}{2} = 43$.

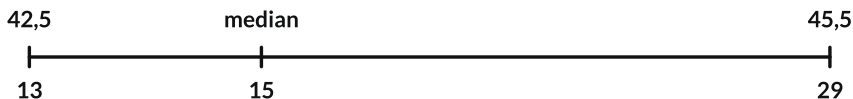
Untuk mencari median dari data kelompok, kita akan menggunakan interpolasi. Bagaimana interpolasi bekerja? Pertama, tentukan dahulu kelas median. Karena jumlah data sebanyak 30, maka data median berada di urutan ke $\frac{1}{2} \times 30 = 15$. Data ke-15 berada di kelas 43–45.

Tepi bawah kelas 43–45 adalah 42,5 dan tepi atasnya adalah 45,5. Setelah itu kamu perlu menentukan banyaknya data yang nilainya di bawah 42,5 dan 45,5.

Banyaknya data yang nilainya di bawah 42,5 yaitu banyaknya data di kelas 37–39 dan kelas 40–42 yaitu ada sebanyak $2 + 11 = 13$.

Banyaknya data yang nilainya di bawah 45,5 yaitu banyaknya data di kelas 37–39, kelas 40–42 dan kelas 43–45 yaitu ada sebanyak $2 + 11 + 16 = 29$.

Semua data yang diperoleh, diletakkan dalam garis bilangan berikut:



Bilangan di atas garis merupakan tepi bawah dan tepi atas dari kelas median. Bilangan di bawah garis merupakan banyaknya data yang terletak di bawah 42,5, di bawah urutan median, dan di bawah 45,5.

Lalu, kamu tinggal membandingkan selisih dari bilangan-bilangan yang ada pada garis bilangan tersebut:

$$\frac{\text{Median} - 42,5}{15 - 13} = \frac{45,5 - 42,5}{29 - 13}$$

$$\frac{\text{Median} - 42,5}{2} = \frac{3}{16}$$

$$\text{Median} - 42,5 = \frac{6}{16} \approx 0,375$$

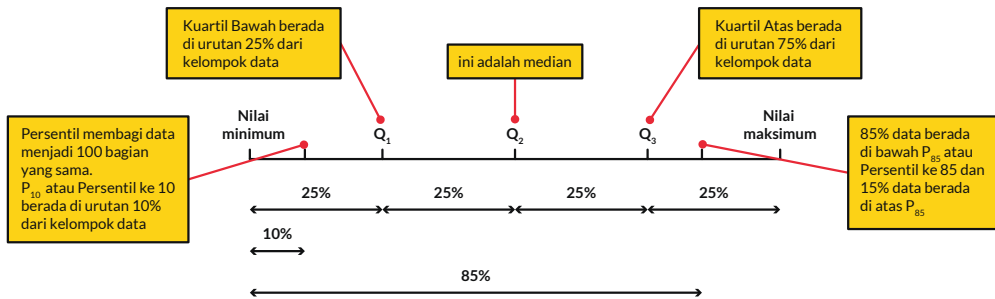
$$\text{Median} = 42,5 + 0,375 = 42,875$$

Ternyata median dari data berkelompok, yaitu 42,875 tidak jauh berbeda dengan median dari data tunggal, yaitu 43. Jadi, walaupun data dikelompokkan, median data kelompok dapat tetap mewakili median dari data tunggal.

2. Ukuran Penempatan (*Measure of Location*)

Kuartil Data Tunggal

Sebelumnya kamu telah mempelajari mengenai median. Median membagi kumpulan data yang telah diurutkan menjadi 2 sama besar (50%). Kamu dapat menentukan ukuran penempatan lainnya seperti kuartil dan persentil.



Gambar 6.10 Letak Kuartil dan Persentil dalam Kelompok Data

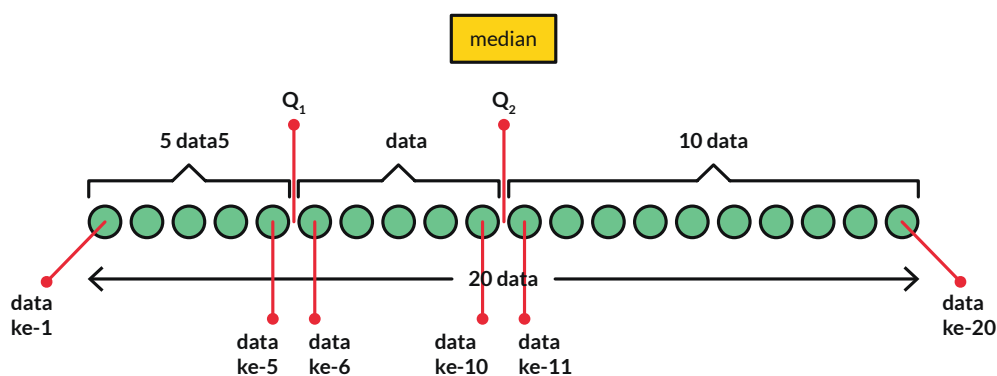
Serupa dengan mencari letak median, maka untuk mencari letak kuartil bawah atau Q_1 , bagilah banyaknya data dengan 4.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat, m , maka Q_1 terletak di tengah-tengah antara urutan ke- m dan ke- $(m + 1)$.
- Tetapi jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka Q_1 terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Misalkan jika banyaknya data ada 20 buah, di manakah letak median? Di manakah letak Q_1 ?

Untuk median, 20 dibagi 2 = 10, maka median terletak di antara data urutan ke-10 dan ke-11.

Untuk Q_1 , 20 dibagi 4 = 5, maka Q_1 terletak di antara data urutan ke-5 dan ke-6. Agar lebih jelas, kamu dapat melihat ilustrasi berikut.



Gambar 6.11 Letak Q_1 dan Q_2 dalam Kelompok Data $n = 20$

Dari ilustrasi di atas, kamu dapat melihat bahwa Median = Q_1 , yaitu membagi kumpulan data menjadi 2 sama besar yaitu, 10 data di sebelah kiri dan 10 data di sebelah kanan.

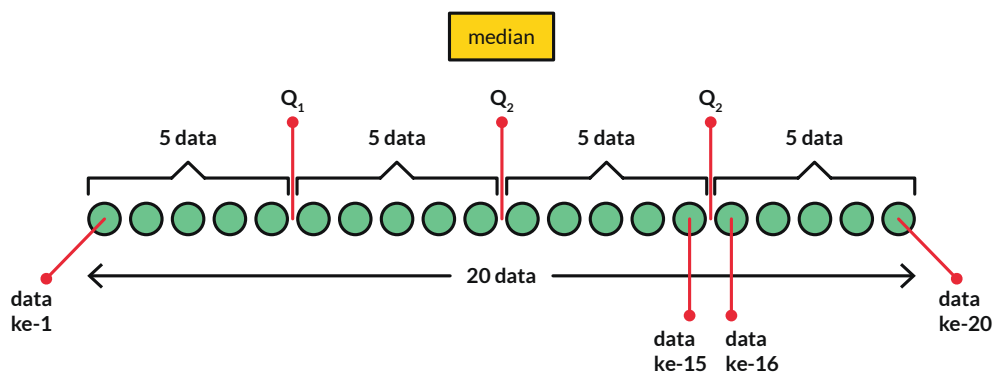
Adapun Q_1 membagi dua ke-10 data yang berada di sebelah kiri menjadi masing-masing sebanyak 5 data.



Ayo, Mencoba

Nah, dapatkan kamu mencari di mana letak Q_3 atau kuartil atas agar dia membagi ke-10 data di sebelah kanan Q_2 sama banyak?

Benar sekali, Q_3 terletak di antara data ke-15 dan ke-16.



Gambar 6.12 Letak Kuartil dalam Kelompok Data $n = 20$

Dari ilustrasi di atas, kamu dapat melihat bahwa Q_1 , Q_2 dan Q_3 membagi kumpulan data menjadi 4 bagian yang sama besar, yaitu masing-masing terdiri dari 5 data.

Atau dapat dikatakan bahwa di antara Q_1 dan Q_2 terdapat 25% data. Demikian juga di antara Q_2 dan Q_3 terdapat 25% data.

Dapatkah kamu menentukan rumus untuk mencari Q_3 ? Coba pikirkan dulu sejenak.

Benar, serupa dengan mencari letak median dan Q_1 , maka untuk mencari letak kuartil atas atau Q_3 adalah dengan mengalikan banyaknya data dengan $\frac{3}{4}$.

- Jika hasilnya adalah bilangan bulat m , maka Q_3 terletak di tengah-tengah antara urutan ke- m dan ke- $(m + 1)$.
- Tapi jika hasil baginya bukan merupakan bilangan bulat, bulatkanlah hasilnya ke atas, maka Q_3 terletak di urutan sesuai hasil pembulatan.

Jika banyaknya data ada 20 buah, maka $\frac{3}{4} \times 20 = 15$. Karena 15 merupakan bilangan bulat, maka letak Q_3 ada di antara data ke-15 dan ke-16. Bandingkan hasilnya dengan ilustrasi di atas. Apakah sama atau berbeda?



Ayo, Mencoba

Carilah Q_1 , Q_2 , dan Q_3 dari data penjualan sepatu pada **Tabel 6.6**.

C. Representasi Data Lanjutan

1. Diagram Box-and-Whisker atau Box plot

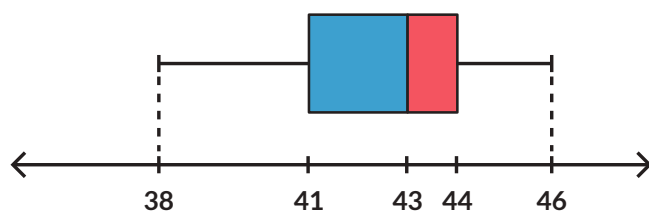


Ayo, Berdiskusi

Mari, kita perhatikan **Gambar 6.13**. Ada bilangan-bilangan yang kamu lihat pada gambar ini.

Bilangan-bilangan berapa sajakah yang tertulis?

Cobalah mengaitkan bilangan-bilangan ini dengan tugas **Ayo, Mencoba** yang baru saja kamu hitung sebelum ini. Apakah yang kamu temukan?



Gambar 6.13 Diagram Box-and-Whisker Penjualan Sepatu

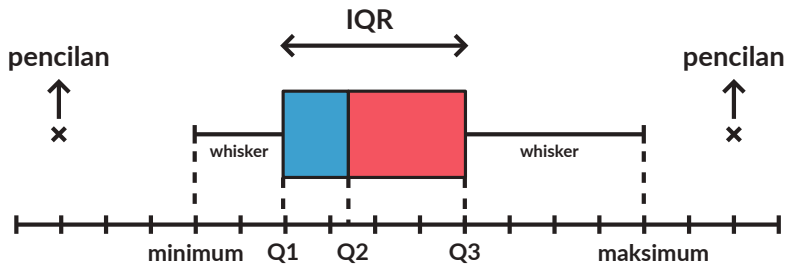
Diskusikan temuan kamu dan kaitannya dengan konsep kuartil yang telah kamu pelajari.

Diagram Box-and-Whisker (atau dikenal juga dengan box plot) adalah salah satu cara memvisualkan distribusi data dalam satu diagram. Diagram ini menampilkan data berdasarkan lima ukuran data yaitu: nilai minimum, kuartil pertama (Q1), median, kuartil ketiga (Q3), dan nilai maksimum.

Penjelasan kelima ukuran data yang akan digunakan dalam box plot adalah sebagai berikut.

- **Nilai Minimum dan Maksimum**, merupakan data terkecil dan terbesar dalam kumpulan data.
- **Kuartil**, membagi data menjadi empat bagian sama besar.
- **Kuartil Pertama (Q1)**: 25% data.
- **Kuartil Ketiga (Q3)**: 75% data.
- **Median (Q2)**: 50% data.
- **Jangkauan Inter Kuartil atau Inter Quartile Range (IQR)**, adalah rentang dengan 50% data tengah berada. IQR dihitung dengan cara $IQR = Q3 - Q1$
- **Pencilan**, adalah data yang letaknya jauh dari data-data lainnya. Biasanya lebih dari 1,5 kali IQR di atas Q3 atau di bawah Q1.

Kelima ukuran data ini digambar menjadi Diagram Box-and-Whisker berikut ini.



Gambar 6.14 Diagram Box-and-Whisker

Untuk lebih jelas lagi marilah kita melihat contoh berikut.



Ayo, Berdiskusi

Sebuah perusahaan penyedia layanan internet ingin menilai kecepatan unduh yang diterima oleh pelanggannya di sebuah kota besar. Dari 20 pelanggan yang diambil sampelnya, perusahaan mendapatkan data kecepatan unduh (dalam Mbps) sebagai berikut:

20, 25, 23, 22, 26, 24, 23, 22, 23, 21, 36, 24, 25, 26, 23, 25, 24, 27, 25, 26

1. Buatlah Diagram Box and Whisker dari data di atas.
2. Apakah kumpulan data ini memiliki pencilan? Jika ada, jelaskan kenapa?
3. Dari gambar box plot, berapa persenkah banyaknya data yang terletak antara 24 dan 27?

Mari kita selesaikan masing-masing soal dengan analisis deskriptif berdasarkan data yang diberikan:

1. **Pertama**, urutkan data: 20, 21, 22, 22, 23, 23, 23, 23, 24, 24, 24, 25, 25, 25, 25, 26, 26, 26, 27, 36

Lalu kita tentukan nilai Q1, Median, dan Q3:

Q1: Nilai tengah antara angka pertama dan median = $(23+23)/2 = 23$

Median: $(24+24)/2 = 24$

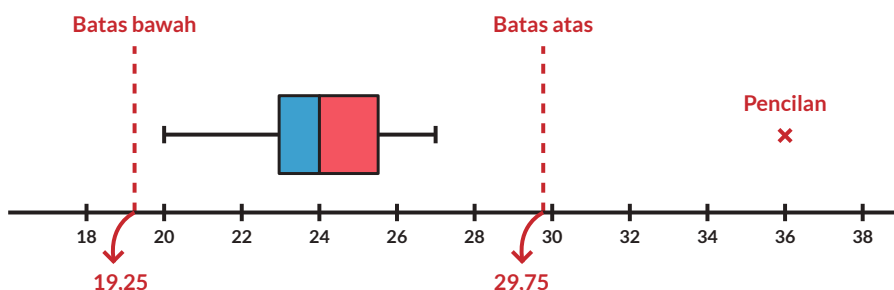
Q3: Nilai tengah antara median dan angka terakhir = $(25+26)/2 = 25,5$

Selanjutnya kita tentukan IQR.

$IQR = Q3 - Q1 = 25,5 - 23 = 2,5$

Tentukan batas atas dan bawah untuk pencilan:

Batas bawah: $Q1 - 1.5 \times IQR = 23 - 3,75 = 19,25$ (tidak ada data di bawah ini) Batas atas: $Q3 + 1.5 \times IQR = 26 + 3.75 = 29,75$



Gambar 6.15 Diagram Box-and-Whisker Kecepatan Unduh Internet

2. Dari data yang ada, 36 jelas melebihi batas atas, $36 > 29,75$ sehingga 36 adalah pencilan.
Diagram Box-and-Whisker akan memiliki *whisker* atau “kumis” atas yang panjang, menunjukkan adanya *outlier* di angka 36. Angka ini mungkin disebabkan oleh kesalahan teknis atau kondisi lain yang membuat kecepatan unduh sangat tinggi. Saat meletakkan data tersebut dalam Diagram Box-and-Whisker, data 36 Mbps tampak sebagai pencilan karena jauh dari data lainnya.
3. Dari gambar Box Plot, dapat dilihat bahwa $Q2 = 24$ dan data maksimum = 27.
Antara $Q2$ dan $Q3$, terdapat 25% data
Antara $Q3$ dan data maksimum, juga terdapat 25% data
Maka antara $Q2$ dan data maksimum, terdapat 50% data.



Ayo, Mencoba

Dalam upaya untuk mempromosikan penggunaan energi yang efisien, Kota Tangerang melakukan survei terhadap konsumsi listrik bulanan (dalam kWh) dari 10 rumah tangga:

300, 320, 310, 305, 315, 320, 750, 310, 325, 315

1. Buatlah Diagram Box-and-Whisker dari data di atas.
2. Mengapa angka 750 kWh dapat dianggap sebagai pencilan?
3. Apa yang mungkin menyebabkan pencilan tersebut?

Menggunakan Box Plot Untuk Membandingkan Dua atau Lebih Kelompok Data

Box Plot tidak hanya berguna untuk melihat bagaimana sebaran dari suatu kelompok data, namun diagram ini juga dapat membantu kita untuk menganalisis dua atau lebih kelompok data, sehingga kita dapat membandingkannya lalu mengambil keputusan terkait data yang ditampilkan.

Mari, kita lihat contoh berikut.

Jika kita menggunakan bola lampu 60 watt selama satu jam, maka artinya lampu tersebut akan membutuhkan listrik sebesar 0.06 kilowatt hour. Bila digunakan selama seribu jam, maka akan membutuhkan 60 kilowatt jam listrik. Bila bola lampu 60 watt dinyalakan selama 8 jam per hari selama 30 hari, energi yang digunakan adalah $0,06 \text{ kWh} \times 8 \text{ jam} \times 30 \text{ hari} = 14.4 \text{ kWh}$. Jadi mari menghemat listrik dengan cara sederhana yaitu matikan lampu saat tidak sedang digunakan.

Jumlah penduduk dunia yang terus bertambah, artinya semakin banyak membutuhkan energi. Ditambah dengan isu lingkungan dan dunia yang lebih bersih, maka banyak negara terus mencoba mengganti penggunaan energi yang berasal dari fosil atau batu bara dengan energi terbarukan yang lebih bersih, antara lain energi dari panel surya dan energi dari turbin angin.

Dua kota, A dan B, sedang menguji sumber energi terbarukan mereka. Kota A mengandalkan panel surya, sedangkan Kota B menggunakan turbin angin. Selama sepuluh hari, mereka mencatat jumlah energi (dalam kilowatt-hour atau kWh) yang mereka hasilkan:

Kota A (Energi Surya): 150, 170, 160, 155, 165, 158, 162, 168, 163, 159

Kota B (Energi Angin): 140, 142, 145, 147, 141, 150, 146, 143, 148, 144

Berdasarkan Diagram Box-and-Whisker dari kedua dataset, kota mana yang memiliki produksi energi yang lebih konsisten? Jelaskan alasanmu.

Kita perlu menentukan 5 data yang diperlukan untuk menggambar masing-masing Box Plot.

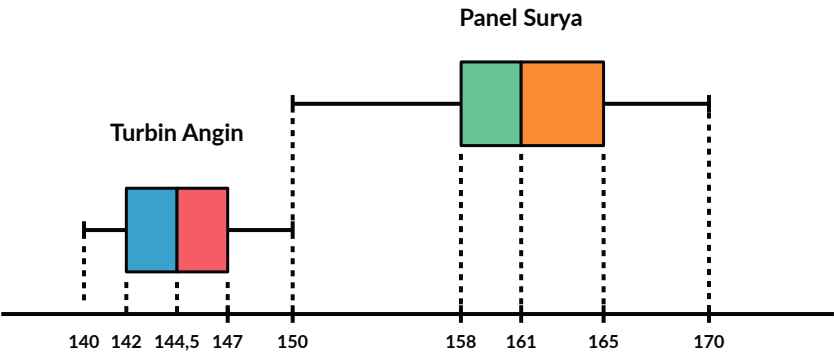
Pada tabel di bawah ini, sudah dilengkapi 5 ukuran data, *range* dan IQR untuk energi surya. Lengkapilah 5 ukuran data, *range* dan IQR untuk energi turbin angin.

	Energi Surya	Turbin Angin
Data Minimum	150	
Data Q1	158	
Data Q2	161	
Data Q3	165	147
Data Maksimum	170	

Kita juga dapat menentukan *range* dan IQR dari masing-masing kelompok.

	Energi Surya	Turbin Angin
Range	20	
IQR	7	

Dari data di atas, kita gambar kedua Box Plot.



Gambar 6.16 Diagram Box-and-Whisker Energi Angin dan Tenaga Surya

Diskusikanlah dengan teman sebangkumu, hal-hal apa saja yang dapat kamu peroleh dari diagram pada **Gambar 6.16**. Setelah selesai berdiskusi, kamu dapat melihat beberapa contoh analisis dari Box Plot pada **Gambar 6.16**.

- Secara umum, energi yang dihasilkan oleh tenaga surya lebih besar dari energi yang dihasilkan oleh turbin angin.
- Box Plot turbin angin memiliki IQR dan *range* yang lebih kecil daripada energi surya, artinya energi yang dihasilkan oleh turbin angin walaupun lebih kecil, namun lebih konsisten.

- 50% data energi turbin angin yang dihasilkan terletak di antara 142 kwh sampai 147 kwh
- 50% data energi tenaga surya yang dihasilkan terletak di antara 158 kwh sampai 165 kwh
- Energi terbesar yang dihasilkan oleh turbin angin adalah 150 kWh, ini sama dengan besar energi terkecil yang dihasilkan oleh panel surya.
- Batas atas turbin angin = $147 + 1,5 \times 5 = 154,5$
 Batas bawah turbin angin = $142 - 1,5 \times 5 = 134,5$
 Artinya tidak ada pencilan pada kumpulan data energi turbin angin
- Batas atas energi surya = $165 + 1,5 \times 7 = 175,5$
 Batas bawah energi surya = $158 - 1,5 \times 7 = 147,5$
 Artinya tidak ada pencilan pada kumpulan data energi panel surya



Ayo, Berpikir Kritis

Jika kota kamu akan menerapkan penggunaan energi terbarukan, manakah yang akan kamu pilih? Energi tenaga surya atau energi turbin angin? Pertimbangkan juga kondisi daerahmu, antara lain apakah daerahmu sering berawan atau kondisi angin kurang kencang untuk memutar turbin.



Ayo, Mencoba

Selain energi surya dan energi angin, salah satu sumber energi lainnya adalah energi hidro atau energi yang dihasilkan oleh tenaga air untuk memutar turbin listrik. Energi hidro termasuk salah satu sumber energi terbarukan yang ramah lingkungan. Hanya saja saat musim kemarau panjang, energi hidro ini menjadi sulit dihasilkan.

Dua rumah tangga membandingkan konsumsi energi bulanan (dalam kwh) mereka setelah memasang sumber energi terbarukan. Rumah A menggunakan energi surya, sedangkan Rumah B menggunakan energi hidro:

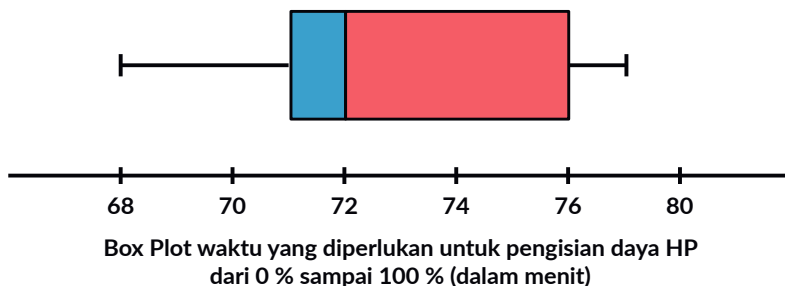
- Rumah A (Energi Surya): 320, 325, 310, 315, 320, 328, 319, 321, 322, 317
- Rumah B (Energi Hidro): 300, 305, 310, 308, 306, 307, 309, 304, 302, 301

Rumah mana yang memiliki konsumsi energi median yang lebih tinggi?

Berdasarkan rentang interkuartil, konsumsi energi rumah tangga mana yang lebih konsisten?

Latihan 6.4

- Perhatikan Box Plot dari data waktu yang diperlukan (dalam menit) untuk pengisian HP dari 0% sampai 100%.



Gambar 6.17 Diagram Box-and-Whisker Kecepatan Pengisian HP dari 0 sampai 100%

- Tentukanlah nilai dari data minimum, Q1, Q2, Q3 dan data maksimum dari data tersebut.
 - Buatlah kumpulan data dengan banyaknya data sebanyak 10 buah yang memiliki Box Plot di atas.
- Dalam upaya untuk mempromosikan penggunaan energi yang efisien, sebuah kota melakukan survei terhadap konsumsi listrik bulanan (dalam kWh) dari 10 rumah tangga diperoleh data sebagai berikut.

300, 320, 310, 305, 315, 320, 750, 310, 325, 315

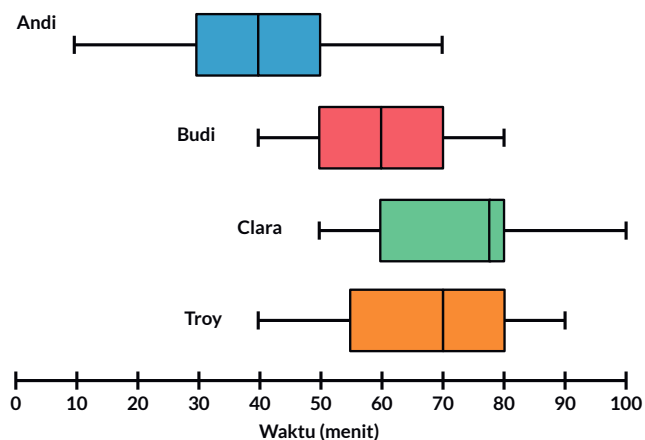
- Buat Diagram Box-and-Whisker dari data di atas.
 - Mengapa angka 750 kWh dapat dianggap sebagai pencilan?
 - Apa yang mungkin menyebabkan pencilan tersebut?
- Dua model *Artificial Intelligence* (AI) dilatih untuk mengenali gambar. Waktu pelatihan (dalam jam) untuk setiap model selama sepuluh sesi pelatihan berbeda adalah sebagai berikut.

Model P: 5; 5,5; 5,2; 5,3; 5,4; 5,1; 5,3; 5,2; 5,4; 5,3

Model Q: 4,5; 5; 4,8; 5,1; 4,9; 4,7; 4,8; 5,2; 4,6; 4,7

Berdasarkan Diagram Box-and-Whisker dari kedua kumpulan data di atas, model mana yang umumnya memerlukan waktu lebih sedikit untuk pelatihan? Model mana yang memiliki rentang waktu pelatihan yang lebih seragam?

4. Selama 20 hari, empat siswa mencatat lamanya mereka belajar untuk mengerjakan pekerjaan rumah/PR setiap malamnya (dalam menit). Data tersebut disajikan dalam Diagram Box-and-Whisker berikut.



Gambar 6.18 Diagram Box-and-Whisker Waktu Lama Belajar

- Siswa manakah yang memiliki median yang paling tinggi?
- Jika sekolah menyarankan untuk setiap siswa, bahwa median dari waktu belajar yang paling pas adalah 70 menit, siswa manakah yang paling mengikuti saran dari sekolah?
- Siswa manakah yang waktu belajarnya paling lama dalam semalam?
- Siswa manakah yang memiliki *range* waktu belajar paling kecil?
- Siswa manakah yang memiliki waktu belajar setidaknya 50 menit?
- Berapa banyakkah siswa yang belajar lebih dari 2 jam dalam 1 malam?

2. Diagram Pencar (Scatter Plot)



Ayo, Berdiskusi

Ibu Tuti, guru Bahasa Indonesia Sekolah Pancasila menyampaikan ke para siswanya, bahwa agar mereka dapat berhasil dalam ulangan Bahasa Indonesia, mereka perlu rajin membaca buku-buku nonfiksi yang disarankan Bu Tuti.

Untuk membuktikan pernyataan Bu Tuti tersebut, Bima mencoba mengumpulkan data jumlah buku yang dia baca dan hasil nilai ulangan Bahasa Indonesia tiap bulannya selama 10 bulan. Data-data ini ditulis dalam **Tabel 6.8**.

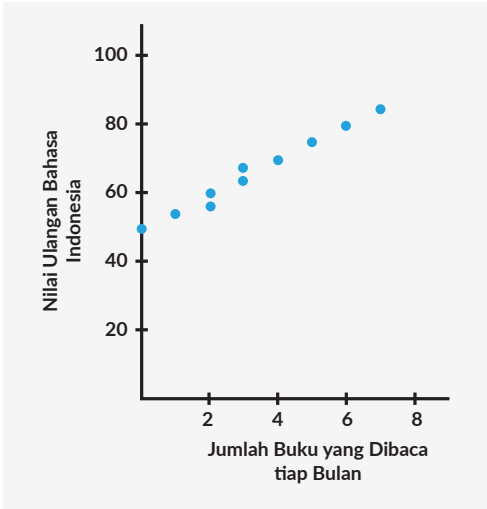
Tabel 6.8 Tabel Jumlah Buku yang Dibaca dan Nilai Ulangan Bahasa Indonesia

Jumlah Buku yang Dibaca per Bulan	2	4	1	3	5	0	6	7	3	2
Nilai Ulangan Bahasa Indonesia	60	70	55	65	75	50	80	85	67	58

Lalu Bima menggambar diagram pencar dari tabel tersebut seperti gambar berikut.

Coba diskusikan dengan teman-teman sekelasmu. Bagaimana menggambar diagram pencar di samping berdasarkan tabel yang diberikan.

Dari data yang diberikan, kita dapat membuat Diagram Pencar dengan sumbu x menunjukkan jumlah buku yang dibaca dan sumbu y menunjukkan nilai ujian bahasa.



Gambar 6.19 Diagram Pencar Buku yang Dibaca dan Nilai Ulangan Bahasa Indonesia



Ayo, Berpikir Kritis

Menurutmu, apakah kita boleh membalik kedua kelompok data ini, dengan nilai ujian bahasa di sumbu x dan jumlah buku yang dibaca di sumbu y ?

Dengan memplot data ke diagram, kita akan melihat titik-titik data menunjukkan kecenderungan naik. Ini berarti, seiring dengan meningkatnya jumlah buku yang dibaca oleh siswa, nilai ujian bahasa mereka juga cenderung meningkat. Berdasarkan Diagram Pencar tersebut, dapat

dikatakan bahwa ada korelasi positif antara jumlah buku yang dibaca per bulan dengan nilai ujian bahasa siswa. Korelasi positif menunjukkan bahwa kedua variabel bergerak ke arah yang sama; jika satu variabel bertambah, maka variabel lainnya juga jadi meningkat atau dalam konteks ini dapat disimpulkan hubungan sebab-akibat sebagai berikut: makin banyak buku yang dibaca, maka nilai ujian bahasa akan makin baik.



Ayo, Berpikir Kritis

Teman Bima, Nakula juga membaca buku sama banyaknya dengan Bima setiap bulannya, namun nilainya hanya mendapatkan nilai 40 sampai 45. Kenapa hal ini bisa terjadi? Diskusikan dengan temanmu.

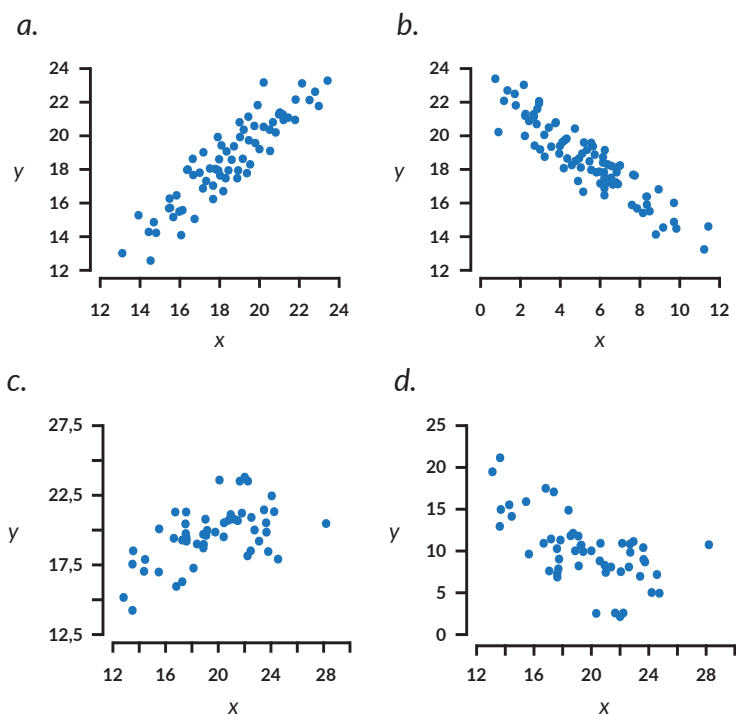
Apa itu Diagram Pencar?

Diagram Pencar (juga dikenal sebagai Scatter Plot) adalah diagram dengan dua set data direpresentasikan sebagai titik-titik di sebuah bidang dengan koordinat Kartesius. Setiap titik mewakili dua nilai data yang dipasangkan dengan koordinat x (sumbu horizontal) mewakili satu nilai dan koordinat y (sumbu vertikal) mewakili nilai lainnya. Tujuan dari diagram pencar ini adalah untuk memvisualisasikan hubungan atau korelasi antara dua set data.

Ketika menganalisis Scatter Plot, salah satu hal yang sering kita cari adalah pola atau tren dalam titik-titik data.

Jenis-jenis korelasi dalam Diagram Pencar adalah sebagai berikut.

- Korelasi Positif: Ketika nilai satu variabel meningkat, nilai variabel lainnya juga meningkat.
- Korelasi Negatif: Ketika nilai satu variabel meningkat, nilai variabel lainnya menurun.
- Tidak Ada Korelasi: Tidak ada hubungan yang jelas antara dua variabel.



Gambar 6.20 Berbagai Jenis Korelasi

Menurutmu, bagaimana korelasi antar kelompok data yang ditunjukkan pada masing-masing diagram? Diskusikanlah terlebih dahulu dengan temanmu.

Diagram a dan c, keduanya menunjukkan korelasi positif yang kuat, makin besar nilai x maka makin besar pula nilai y -nya. Apa perbedaan antara diagram a dengan diagram c?

Walaupun sama-sama memiliki korelasi positif, diagram a dapat dikatakan memiliki korelasi positif kuat, sedangkan diagram c memiliki korelasi positif sedang. Menurutmu apakah alasannya?

Perbedaan antara korelasi positif kuat dan korelasi positif sedang pada Scatter Plot umumnya dapat dilihat pada seberapa dekat titik-titik data tersebut membentuk suatu garis lurus. Pada korelasi positif kuat, titik-titik data pada Scatter Plot cenderung sangat dekat dan menyerupai garis linear. Distribusi titik-titik data mengikuti pola garis lurus yang cenderung naik. Seiring dengan meningkatnya nilai variabel x , nilai variabel y juga meningkat dengan konsistensi yang jelas.

Adapun pada korelasi positif sedang, titik-titik data pada Scatter Plot cenderung berada di sekitar garis linear, tetapi dengan deviasi yang lebih besar dibandingkan dengan korelasi positif kuat. Meskipun ada pola kenaikan yang terlihat, beberapa titik mungkin jauh dari garis linear. Ada hubungan positif antara variabel X dan Y, tetapi hubungannya tidak sekuat dalam kasus korelasi positif kuat.

Bagaimana dengan diagram b dan d? Apakah persamaan dan perbedaan dari kedua diagram ini? Kedua diagram, sama-sama memiliki korelasi negatif. Ketika nilai x makin bertambah, ternyata nilai y makin berkurang. Perbedaannya adalah diagram b menunjukkan korelasi negatif kuat, sedangkan diagram d memiliki korelasi negatif sedang.



Ayo, Mencoba

Polusi udara adalah masalah yang seringkali muncul di kota-kota besar. Bagaimana mengetahui seberapa bersih atau kotorinya udara di sekitar kita?

Tingkat polusi udara merupakan seberapa banyak kumpulan dari berbagai jenis partikel dan gas yang berasal dari berbagai sumber, dan PM2.5 adalah salah satu komponen utama dari banyak zat pencemar yang ditemukan di udara. Dari semua zat pencemar udara, PM2.5 sering kali dianggap sebagai yang paling berbahaya bagi kesehatan manusia karena ukurannya yang sangat kecil memungkinkan partikel-partikel ini menembus lebih dalam ke dalam sistem pernapasan, mencapai paru-paru dan bahkan dapat memasuki aliran darah. PM2.5 dapat berasal dari berbagai sumber, termasuk pembakaran bahan bakar fosil, kebakaran hutan, kegiatan industri, dan kendaraan bermotor. PM2.5 diukur dalam mikrogram per meter kubik ($\mu\text{g}/\text{m}^3$) untuk menentukan kualitas udara. Berdasarkan pengukuran ini, berbagai organisasi dan pemerintah menetapkan standar atau batasan untuk konsentrasi PM2.5 untuk melindungi kesehatan masyarakat. Di Indonesia, batas PM2.5 adalah $55 \mu\text{g}/\text{m}^3$.

Mengurangi konsentrasi PM2.5 di udara sering kali menjadi fokus utama dalam upaya mengurangi polusi udara, karena partikel ini memiliki dampak kesehatan yang signifikan. Strategi pengurangan dapat meliputi peningkatan efisiensi pembakaran, penggunaan bahan bakar yang lebih

bersih, pengendalian emisi dari industri, dan promosi transportasi yang ramah lingkungan.

Dengan kata lain, PM2.5 adalah salah satu faktor kunci yang berkontribusi pada polusi udara dan memiliki dampak kesehatan yang signifikan, sehingga memahami dan mengendalikannya penting dalam upaya untuk meningkatkan kualitas udara dan kesehatan masyarakat.

Berikut adalah 20 data yang menunjukkan jumlah pohon yang ditanam setiap tahun dengan tingkat polusi udara (diukur dalam level PM2.5).

Tabel 6.9 Tabel Jumlah Pohon Ditanam dan Tingkat Polusi (Level PM2.5)

Jumlah Pohon Ditanam (tiap tahun)	Tingkat Polusi (Level PM 2.5)	Jumlah Pohon Ditanam (tiap tahun)	Tingkat Polusi (Level PM 2.5)
200	50	230	47
250	47	245	46
220	49	240	46
275	46	250	45
280	45	235	47
230	48	255	45
210	50	225	48
290	44	260	45
260	46	240	46
270	45	230	47

1. Buatlah Diagram Pencar dari data pada **Tabel 6.9**, dengan jumlah pohon sebagai sumbu x dan tingkat polusi udara sebagai sumbu y .
2. Tentukanlah jenis korelasinya, lalu apakah masuk dalam kategori kuat atau sedang?



Ayo, Mencoba

Sebuah kota telah melakukan pengukuran tingkat polusi udara berdasarkan konsentrasi PM2.5 selama 20 hari. Pengukuran dilakukan untuk menilai kualitas udara dan potensi dampaknya terhadap kesehatan masyarakat. Data yang diperoleh diberikan dalam tabel berikut.

Hari ke-	Konsentrasi PM2.5	Hari ke-	Konsentrasi PM2.5
1	35	11	36
2	32	12	43
3	40	13	48
4	38	14	46
5	45	15	35
6	50	16	31
7	42	17	33
8	37	18	41
9	34	19	45
10	39	20	44

1. Buatlah diagram pencar dengan sumbu x menunjukkan hari pengukuran dan sumbu y menunjukkan konsentrasi PM 2.5
2. Korelasi apakah yang kamu temui dari diagram pencar ini? Jelaskan.
3. Menurutmu, apakah ada kebutuhan untuk pemerintah setempat melakukan tindakan pengurangan polusi udara di kota tersebut? Mengapa?
4. Bagaimana dengan tingkat polusi di kotamu? Kamu dapat mengumpulkan data tingkat polusi harian selama 1 bulan melalui website <https://www.iqair.com>. Lalu cobalah membuat diagram pencar dari data yang kamu kumpulkan. Analisislah korelasi dari data yang kamu kumpulkan.

Perlu kamu ketahui, bahwa tidak semua korelasi menunjukkan hubungan sebab-akibat ya. Seperti pada contoh di atas, bahwa data yang menunjukkan urutan hari, tidak ada kaitannya dengan tingkat polusi. Namun kita dapat melihat bagaimana kecenderungan tren dari tingkat polusi di kota tersebut.

Latihan 6.5

- Sebuah perusahaan teknologi melakukan penelitian terhadap 15 aplikasi AI yang mereka kembangkan. Mereka mencatat jumlah jam pelatihan yang diberikan kepada setiap model AI dan akurasinya dalam menyelesaikan tugas tertentu.

Jumlah Jam Pelatihan	Akurasi Model (%)	Jumlah Jam Pelatihan	Akurasi Model (%)
5	60	13	66
10	62	14	68
7	61	15	70
12	65	16	71
8	62	18	73
11	64	20	75
6	60	19	74
9	63		

Buatlah diagram pencar berdasarkan data yang diberikan, dengan sumbu x menunjukkan jumlah jam pelatihan dan sumbu y menunjukkan akurasi model. Apakah terdapat korelasi antara jumlah jam pelatihan dan akurasi model? Jelaskan.

- Sebuah studi dilakukan untuk mengetahui hubungan antara jumlah postingan per minggu di media sosial oleh selebriti dengan jumlah pengikut baru yang mereka peroleh. Data dikumpulkan selama 8 minggu.

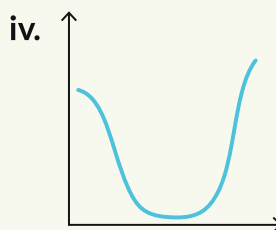
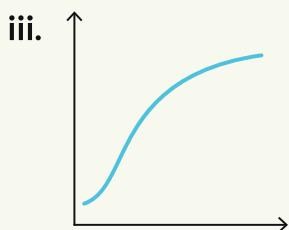
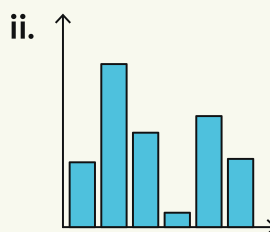
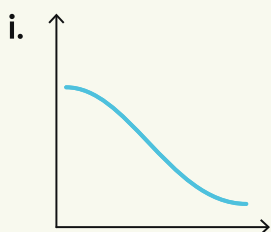
Jumlah Posting per Minggu	Jumlah Pengikut Baru	Jumlah Posting per Minggu	Jumlah Pengikut Baru
3	2000	3	2100
4	2400	8	3400
1	1500	4	2500
5	2900	9	3600
2	1800	5	2800

Jumlah Posting per Minggu	Jumlah Pengikut Baru	Jumlah Posting per Minggu	Jumlah Pengikut Baru
6	3100	6	3000
2	1700	7	3200
3	2100		

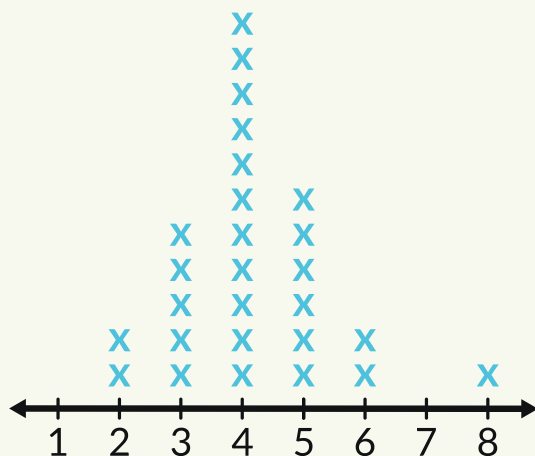
Dengan menggunakan Diagram Pencar, gambarkan hubungan antara jumlah postingan per minggu (sumbu x) dan jumlah pengikut baru (sumbu y). Apakah selebriti yang lebih sering memposting mendapatkan lebih banyak pengikut baru? Analisis dan interpretasikan pola yang kamu lihat.

Uji Kompetensi

1. Di antara keempat grafik di bawah ini, manakah yang merupakan grafik dari:
 - a. Perubahan berat badan seekor kucing dari lahir sampai usia 2 tahun.
 - b. Aktivitas kegiatan anak dari sebelum tidur dan setelah tidur.
 - c. Jumlah penduduk di 6 kota yang berbeda.
 - d. Ketinggian permukaan air laut dari kondisi pasang ke kondisi surut.



2. Saat pelajaran Matematika, para siswa di kelas 10 menggambar Box Plot yang menunjukkan banyaknya anggota keluarga dari setiap siswa.



- Berapakah banyaknya orang yang terdapat dalam keluarga para siswa di kelas tersebut?
 - Seorang siswa yang bernama Jono berkata, “Dot plot ini salah! Anggota keluarga saya berjumlah 8 orang. Saya memiliki jumlah anggota keluarga yang terbanyak, mengapa tanda X di atas angka 8 malah jadi yang paling pendek?” Jawablah pertanyaan Jono.
3. Hasil 4 ulangan Matematika Dodi adalah 81, 79, 90, dan 70. Ulangan ke-5 baru akan dibagikan. Guru Dodi menyampaikan ke Dodi bahwa Dodi boleh memilih apakah mau menggunakan median atau *mean* sebagai nilai rapornya, tetapi Dodi harus menentukan sebelum ia menerima hasil tes matematika yang ke-5.
- Hitunglah *mean* dan median dari keempat hasil ulangan Matematika Dodi.
 - Jika Dodi tidak yakin dengan hasil ulangan ke-5 nya, manakah yang sebaiknya ia pilih, *mean* atau median? Jelaskan.
 - Jika Dodi yakin dengan hasil ulangan ke-5 nya, manakah yang sebaiknya ia pilih, *mean* atau median? Jelaskan.
4. Dalam ujian Fisika, rata-rata nilai dari delapan siswa adalah 65. Rata-rata grup kedua yang berjumlah 12 siswa adalah 72. Hitunglah rata-rata gabungan dari kedua kelompok ini yang berjumlah 20 siswa.

5. Selama tahun ajaran yang lalu, diperoleh data banyaknya hari saat siswa tidak hadir.

Jumlah Hari Absen	0	1	2	3	4
Frekuensi	12	20	10	7	5

- Hitunglah Q_1 dari data ini, lalu interpretasikan hasilnya.
 - Hitunglah jangkauan interkuartil dari data ini.
 - Hitunglah standar deviasi dari data jumlah hari absen tersebut.
6. Dalam suatu lomba lari, diperoleh data catatan waktu sebagai berikut:

Waktu yang ditempuh, t (menit)	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69
Frekuensi	5	10	36	20	9

- Hitunglah *mean*.
- Gunakanlah interpolasi untuk menghitung jangkauan interkuartil.
- Jika diketahui $\Sigma fx = 3.740$ dan $\Sigma fx^2 = 183.040$ dengan x adalah nilai tengah dari tiap kelas, maka tentukanlah nilai dari varian dan simpangan baku dari catatan waktu para pelari.

dikerjakan setelah materi pengayaan dibahas

Pengayaan

Kuartil Data Kelompok

Sama seperti menentukan median (Q_2) dalam data kelompok, menentukan Q_1 dan Q_3 juga menggunakan cara yang sama, yaitu dengan cara interpolasi.

Dalam data kelompok, letak Q_1 , Q_2 dan Q_3 adalah sebagai berikut.

Kelompok data ditampilkan dalam tabel frekuensi kumulatif, lalu letak kuartil adalah sebagai berikut:

- Q_1 = data ke $\frac{1}{4}$ dari total data
- Q_2 = data ke $\frac{1}{2}$ dari total data
- Q_3 = data ke $\frac{3}{4}$ dari total data

Mari kita gunakan contoh penjualan sepatu di toko A pada **Tabel 6.5**.

Karena total data ada sebanyak 30 buah, maka letak Q_1 ada di data ke $\frac{1}{4} \times 30 = 7,5$

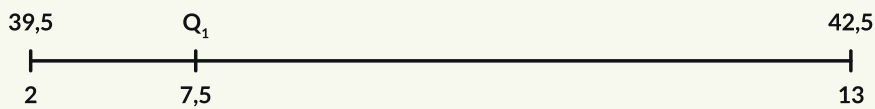
Pada tabel, data ke 7,5 terletak pada kelas 40–42. Masihkah kamu ingat metode interpolasi?

Tepi bawah kelas 40–42 adalah 39,5 dan tepi atas kelas 40–42 adalah 42,5.

Banyaknya data yang berada sebelum 39,5 ada sebanyak 2 buah.

Banyaknya data yang berada sebelum 42,5 ada sebanyak 13 buah.

Tempatkan angka-angka tersebut dalam garis bilangan sebagai berikut.



$$\frac{Q_1 - 39,5}{7,5 - 2} = \frac{42,5 - 39,5}{13 - 2}$$

$$\frac{Q_1 - 39,5}{5,5} = \frac{3}{11}$$

$$Q_1 - 39,5 = \frac{3}{11} \times 5,5$$

$$Q_1 - 39,5 = 1,5$$

$$Q_1 = 41$$

$Q_1 = 41$, artinya 25% dari sepatu yang terjual memiliki ukuran lebih kecil sama dengan 41, atau ukuran 38, 39, 40, dan 41.

Sebanyak 75% sepatu yang terjual merupakan sepatu dengan ukuran di atas 41.



Ayo, Mencoba

Carilah Q_3 dari data berkelompok penjualan sepatu di toko A pada **Tabel 6.5**.

Bandingkanlah hasil Q_1 dan Q_3 dari data berkelompok dengan Q_1 dan Q_1 dari data tunggal. Jelaskan.

Jadi, saat menghitung kuartil, pastikan terlebih dahulu apakah data yang kamu akan hitung adalah data tunggal atau data kelompok agar metode yang dipilih lebih tepat.

Persentil Data Kelompok

Sebelumnya kamu telah mempelajari bahwa kuartil membagi data menjadi 4 bagian sama besar. Ukuran penempatan yang lain adalah persentil. Hanya saja persentil membagi data menjadi 100 bagian sama besar. Persentil ke-10 ditulis dengan simbol P_{10} artinya sebelum P_{10} terdapat 10% data dan sesudah P_{10} terdapat 90% data.

Cara menentukan persentil dalam data kelompok, sama dengan cara menentukan kuartil dalam data kelompok, yaitu dengan cara interpolasi.

Kelompok data ditampilkan dalam tabel frekuensi kumulatif, lalu letak persentil adalah sebagai berikut.

- P_{10} = data ke $\frac{10}{100}$ dari total data
- P_{10} = data ke $\frac{85}{100}$ dari total data

Eksplorasi 6.7 Persentil Data Kelompok



Ayo, Bereksplorasi

1. Mari, kita lihat data berikut. Data berikut menampilkan lamanya waktu yang diperlukan ketika seseorang mengurus KTP di kelurahan M selama 1 minggu.

Waktu yang diperlukan, t (menit)	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69
Frekuensi	6	10	18	13	2

Hitunglah P_{65} .



Ayo, Berpikir Kritis

Ketika kita melihat pengumuman atau klaim dari seseorang atau siapa pun, ada baiknya kita mempertanyakan dasar dari klaim atau pengumuman tersebut, tidak begitu saja menerimanya tanpa data pendukung. Kehati-hatian ini menjadi bekal yang sangat penting saat menghadapi berbagai masalah.

2. Di papan pengumuman kantor kelurahan tertulis poster sebagai berikut.

Untuk pengurusan KTP
Hanya 10% dari warga yang perlu menunggu lebih dari 56 menit

Dengan menghitung persentil yang sesuai, berikan komentarmu tentang benar atau tidaknya isi dari poster tersebut.

Alternatif Penyelesaian

1. Karena data di atas merupakan data kelompok, maka kita akan menggunakan interpolasi untuk menemukan persentil ke-65.

Pertama kita tentukan dahulu letak P_{65} . Total frekuensi ada sebanyak 49 buah.

- P_{65} terletak pada data ke $\frac{65}{100} \times 49 = 31,85$
- Jadi P_{65} ada di kelas dengan interval 40–49.

Tepi bawah kelas 40–49 adalah 39,5 dan tepi atas kelas 40–49 adalah 49,5.

Banyaknya data sebelum 39,5 ada sebanyak 16 data.

Banyaknya data sebelum 49,5 ada sebanyak 34 data.

Tempatkan angka-angka tersebut dalam garis bilangan sebagai berikut:



Lalu kita gunakan interpolasi:

$$\frac{P_{65} - 39,5}{31,85 - 16} = \frac{49,5 - 39,5}{34 - 16}$$

$$\frac{P_{65} - 39,5}{15,85} = \frac{10}{18}$$

$$P_{65} - 39,5 = \frac{5}{9} \times 15,85$$

$$P_{65} - 39,5 = 8,81$$

$$P_{65} = 48,31$$

$P_{65} = 48,31$ artinya 65% warga menunggu kurang dari 48,31 menit atau 35% warga menunggu lebih dari 46,31 menit.

2. Untuk menentukan apakah isi poster tersebut benar atau tidak, maka kamu perlu mencari Persentil ke-90.

Pertama kita tentukan dahulu letak P_{65} .

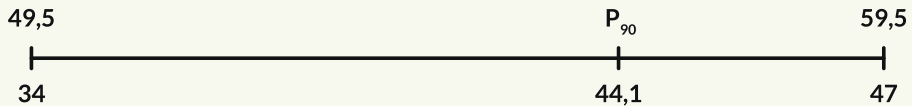
- P_{65} terletak pada data ke $\frac{90}{100} \times 49 = 44,1$
- Data ke-44,1 terletak pada kelas 50–59
- Jadi P_{65} ada di kelas 50–59.

Kelas 50–59 memiliki tepi bawah = 49,5 dan tepi atas = 59,5.

Banyaknya data sebelum 49,5 ada sebanyak 34 data.

Banyaknya data sebelum 59,5 ada sebanyak 47 data.

Tempatkan angka-angka tersebut dalam garis bilangan sebagai berikut:



Lalu, kita kembali menggunakan interpolasi:

$$\frac{P_{90} - 49,5}{44,1 - 34} = \frac{59,5 - 49,5}{47 - 34}$$

$$\frac{P_{90} - 49,5}{10,1} = \frac{10}{13}$$

$$P_{90} - 49,5 = \frac{10}{13} \times 10,1$$

$$P_{90} - 49,5 = 7,8$$

$$P_{90} = 49,5 + 7,8$$

$$P_{90} = 57,3$$

Interpretasi dari hasil $P_{90} = 57,3$ artinya 90% warga menunggu pengurusan KTP sampai 57,3 menit dan ada 10% warga yang menunggu lebih dari 57,3 menit. Jadi isi poster yang menyebutkan bahwa hanya 10% warga yang menunggu lebih dari 56 menit tidak tepat. Karena pasti lebih dari 10% warga yang menunggu lebih dari 56 menit.



Alternatif lain, kamu dapat mencari banyaknya warga yang menunggu lebih dari 56 menit.

Data 56 menit berada di kelas 50–59.

Tepi bawah dan tepi atas kelas 50–59 adalah 49,5 dan 59,5.

Banyaknya data sebelum 49,5 ada sebanyak 34 data.

Banyaknya data sebelum 59,5 ada sebanyak 47 data.

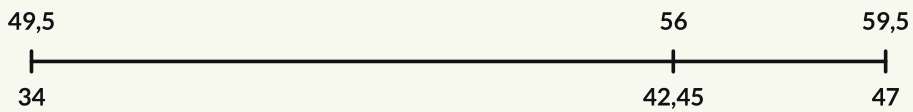
Tempatkan angka-angka tersebut dalam garis bilangan sebagai berikut.



Sama seperti sebelumnya, kita kembali menggunakan metode interpolasi:

$$\begin{aligned}\frac{56 - 49,5}{M - 34} &= \frac{59,5 - 49,5}{47 - 34} \\ \frac{6,5}{M - 34} &= \frac{10}{13} \\ (13)(6,5) &= 10(M - 34) \\ 84,5 &= 10(M - 34) \\ M - 34 &= 8,45 \\ M &= 34 + 8,45 \\ M &= 42,45\end{aligned}$$

Setelah mendapatkan hasil di atas kita coba interpretasikan hasilnya.



Total data = 49.

42,45 warga menunggu pengurusan KTP kurang dari 56 menit.

Banyaknya warga menunggu pengurusan KTP lebih dari 56 menit =

$$49 - 42,45 = 6,55$$

Persentase warga yang menunggu lebih dari 56 menit =

$$\frac{6,55}{49} \times 100\% = 13,4\%$$

Jadi, klaim kantor kelurahan bahwa hanya 10% warga yang menunggu lebih dari 56 menit tidak benar.

Latihan 6.6

1. Secara geografis Indonesia dilalui oleh garis khatulistiwa sehingga hanya terdapat 2 musim, yaitu musim panas dan musim hujan. Oleh karena itu, sangat penting bagi kita untuk memahami faktor penting apa saja yang ada pada kedua musim tersebut agar kita dapat mempersiapkan diri dengan lebih baik dalam usaha hidup berdamai dengan alam. Salah satu faktor yang penting yang menentukan musim adalah faktor curah hujan.

Curah hujan adalah jumlah air hujan yang turun pada suatu daerah dalam kurun waktu tertentu. Dengan kata lain, curah hujan adalah

volume air hujan yang terkumpul dalam bidang datar dalam periode tertentu.

Biasanya curah hujan dinyatakan dalam satuan milimeter. Data curah hujan yang ditampilkan adalah ketinggian air hujan yang terkumpul di tempat datar seluas 1 meter persegi. Jadi, jika curah hujan sebesar 1 mm artinya volume air hujan yang terkumpul pada tempat datar seluas 1 meter persegi ada sebanyak 1 liter. Pada umumnya curah hujan dikategorikan menjadi 3 kategori, yaitu rendah (0–100 mm), menengah (100–300 mm), dan tinggi (300–500 mm).

Perhatikan data curah hujan di Kota Samarinda sepanjang tahun 2017 berikut (dalam mm, dibulatkan ke satuan terdekat):

161 139 88 343 309 421 161 250 100 152 219 223

Sumber: <https://samarindakota.bps.go.id>

- Tentukanlah median dari data tersebut.
 - Tentukanlah Q_1 dan Q_3 dari data tersebut. Apakah kamu perlu melakukan interpolasi?
2. Menjelang Hari Raya Kurban, biasanya para peternak sapi mempersiapkan sapi-sapi yang akan dijual. Berikut data berat 31 ekor sapi yang akan dijual oleh peternak.

Berat sapi (kg)	300–349	350–399	400–449	450–499	500–549
Frekuensi	3	6	10	7	5

- Tentukanlah estimasi dari median berat sapi di atas.
 - Carilah Q_1 . Apakah kamu perlu melakukan interpolasi?
 - Carilah Q_3 .
 - Interpretasikanlah hasil Q_3 yang kamu dapatkan di bagian c.
 - Carilah P_{10} , lalu interpretasikan hasilnya.
3. Indonesia adalah negara yang kaya dan terkenal dengan faunanya yang beraneka ragam. Bahkan, banyak hewan yang hanya terdapat di Indonesia karena keunikan kondisi alamnya. Karena itulah kita harus melestarikan dan memperhatikan hewan langka yang masih tersisa agar kelak generasi selanjutnya tetap dapat menyaksikan kelangsungan hidup

hewan langka ini. Salah satu contoh hewan langka adalah burung elang jawa (*Nisaetus bartelsi*). Jumlahnya saat ini diperkirakan hanya tinggal sekitar 300–500 ekor saja.

Tabel di bawah ini menunjukkan panjang bentang sayap elang jawa dalam meter yang berhasil dikumpulkan oleh para peneliti lingkungan.

Panjang Bentang Sayap (cm)	166–170	171–175	176–180	181–185	Lebih dari 186
Frekuensi	4	20	37	28	11

- Tentukanlah Q_1 dan Q_3 .
- Tentukanlah persentil ke-80 dan interpretasikanlah hasilnya.
- Jelaskan mengapa tidak mungkin dapat menemukan persentil ke-90.



Ayo, Berefleksi

Dalam subbab ini, kamu sudah belajar mengenai ukuran lokasi: kuartil dan persentil.

- Kuartil berapakah yang sama dengan median?
- Ada berapa persen datakah yang di atas Q_3 ?
- Ada berapa persen datakah yang di atas Q_1 ?
- Ada berapa persen datakah yang di bawah P_{15} ?
- Kuartil berapakah yang nilainya sama dengan P_{25} ? P_{75} ?

Ukuran Penyebaran

1. Jangkauan Interkuartil

Ukuran penyebaran dari sekumpulan data mengukur seberapa jauh data-data tersebut tersebar. Dua kelompok data yang memiliki *mean* yang sama, dapat memiliki uluran penyebaran yang sangat berbeda.



Ayo, Bereksplorasi

Kelompok pertama yang terdiri atas 12 orang memiliki umur: 13, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18

Kelompok kedua yang juga terdiri atas 12 orang memiliki umur: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 27, 28, 29, 32, 36

Hitunglah *mean*, Q_1 , dan Q_3 dari kedua kelompok di atas.

Rata-rata umur dari kelompok pertama maupun kelompok kedua adalah 16 tahun.

Walaupun kedua kelompok memiliki *mean* yang sama, jika kamu memperhatikan setiap data dari kedua kelompok, manakah yang menurutmu lebih mewakili kelompok umur siswa? Manakah yang lebih mewakili umur orang dewasa dan anak kecil? Jelaskan alasanmu.

Salah satu ukuran penyebaran yang telah kamu pelajari sebelumnya adalah jangkauan (*range*).

Range kelompok pertama = $18 - 13 = 5$

Range kelompok kedua = $36 - 1 = 35$

Range kelompok kedua lebih besar dari *range* kelompok pertama, berarti data pada kelompok kedua jauh lebih tersebar dibanding kelompok pertama.

Ukuran penyebaran lain yang dapat digunakan adalah jangkauan interkuartil. Jangkauan interkuartil diperoleh dengan cara mencari selisih antara kuartil atas (Q_3) dan kuartil bawah (Q_1).

Menghitung Q_1 dan Q_3 kelompok pertama, tidak perlu menggunakan metode interpolasi karena data merupakan data tunggal.

Karena $\frac{1}{4}$ data = $\frac{1}{4} \times 12 = 3$, maka Q_1 terletak di antara data ke-3 dan ke-4

Sedangkan $\frac{3}{4} \times 12 = 9$, maka Q_3 terletak di antara data ke-9 dan ke-10

Kelompok pertama: $Q_1 = 15$ dan $Q_3 = 17$

Kelompok kedua: $Q_1 = 4,5$ dan $Q_3 = 28,5$

Jangkauan interkuartil kelompok pertama = $17 - 15 = 2$, sedangkan jangkauan interkuartil kelompok kedua = $28,5 - 4,5 = 24$.

Jika hasil di atas kita tampilkan dalam tabel, akan diperoleh hasil sebagai berikut.

Tabel 6.10 Perbandingan *Mean*, *Range* dan Jangkauan Interkuartil Antara Kelompok Pertama dan Kedua

Kelompok	Mean	Range	Jangkauan Interkuartil
Pertama	16	5	2
Kedua	16	35	24

Maka dari itu, kita dapat menyimpulkan bahwa walaupun kedua kelompok memiliki rata-rata umur yang sama yaitu 16, kamu akan dapat menemukan teman-teman yang seumuran denganmu pada kelompok pertama daripada kelompok kedua. Hal ini dikarenakan data-data yang tersebar pada kelompok pertama memiliki ukuran penyebaran (*range* dan jangkauan interkuartil) yang lebih kecil dibanding kelompok kedua. Jadi, data pada kelompok pertama banyak yang besarnya di sekitar *mean*.

2. Varian dan Simpangan Baku Data Tunggal

Ukuran penyebaran lainnya yang biasa digunakan untuk mengetahui sebaran data adalah varian.

Makin kecil varian, maka data-data dalam kelompok tersebut makin seragam mendekati *mean* kelompok. Demikian juga sebaliknya.

Varian diperoleh dengan cara mengurangi setiap data dengan *mean*, atau dengan rumus berikut:

$$\text{Varian} = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}, \text{ dengan } \bar{x} \text{ adalah } \textit{mean}.$$

Varian sering diberikan ditulis dalam simbol σ^2 .

Adapun simpangan baku adalah akar dari varian. Simbol untuk simpangan baku adalah σ .

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$



Ayo, Bereksplorasi

Kembali ke soal kelompok umur:

Kelompok pertama yang terdiri atas 12 orang memiliki umur: 13, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 17, 17, 18.

Kelompok kedua yang juga terdiri atas 12 orang memiliki umur: 1, 3, 4, 5, 7, 8, 12, 27, 28, 29, 32, 36.

Hitunglah varian dan simpangan baku dari kedua kelompok umur ini.

Rata-rata dari kelompok pertama maupun kedua = 16. Selanjutnya, mari kita hitung varian masing-masing kelompok.

$$\begin{aligned}\sigma^2 \text{ Kelompok 1} &= \frac{(13-16)^2 + (14-16)^2 + 2(15-16)^2 + 2(16-16)^2 + 5(17-16)^2 + (18-16)^2}{12} \\ &= \frac{9 + 4 + 2 + 0 + 5 + 4}{12} = \frac{24}{12} = 2\end{aligned}$$

σ^2 Kelompok 2

$$\begin{aligned}&= \frac{(1-16)^2 + (3-16)^2 + (4-16)^2 + (5-16)^2 + (7-16)^2 + (8-16)^2 + (12-16)^2 + (27-16)^2 + (28-16)^2 + (29-16)^2 + (32-16)^2 + (36-16)^2}{12} \\ &= \frac{225 + 169 + 144 + 121 + 81 + 64 + 16 + 121 + 144 + 169 + 256 + 400}{12} = \frac{1910}{12} = 159,2\end{aligned}$$

Simpangan baku (σ) kelompok 1 = $\sigma^1 = \sqrt{2} = 1,41$

Simpangan baku (σ) kelompok 2 = $\sigma^2 = \sqrt{159,2} = 12,62$

Kita dapat melihat bahwa nilai σ^2 yang besar menunjukkan bahwa data-data umur pada kelompok 2 memiliki sebaran yang jauh dari *mean* kelompok 2. Adapun kelompok 1 memiliki data-data yang relatif seragam dan mendekati *mean* kelompok 1.

Cara lain dalam menghitung varian:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n} \right)^2$$

Mari, kita menghitung ulang nilai dari varian kelompok 1 dengan rumus di atas dan membandingkan hasilnya dengan cara sebelumnya.

$$\Sigma x = 13 + 14 + 15 + 15 + 16 + 16 + 17 + 17 + 17 + 17 + 17 + 18 = 192$$

$$\Sigma x^2 = 13^2 + 14^2 + 15^2 + 15^2 + 16^2 + 16^2 + 17^2 + 17^2 + 17^2 + 17^2 + 17^2 + 18^2 = 3096$$

Karena jumlah data ada sebanyak 12, maka $n = 12$

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n} \right)^2 = \frac{3096}{12} - \left(\frac{192}{12} \right)^2 = 2$$



Ayo, Berdiskusi

Mengapa rumus kedua bisa memberikan hasil yang sama?

Bagaimana hasil varian dengan cara ini dibanding cara sebelumnya? Apakah sama?



Ayo, Mencoba

1. Kamu dapat mencoba untuk mencari varian dengan rumus $\sigma^2 = \frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n} \right)^2$ untuk kelompok yang kedua.
2. Jika ada kelompok ketiga yang juga beranggotakan 12 orang, dan semuanya berusia 16 tahun, tanpa melakukan perhitungan menggunakan rumus, dapatkah kamu menentukan *mean*, varian, dan simpangan baku dari kelompok ketiga ini?

3. Varian dan Simpangan Baku Data Kelompok

Sama halnya seperti mencari *mean* dari data kelompok, kita akan selalu mengasumsikan bahwa data-data yang terdapat dalam kelas interval tertentu diasumsikan tersebar merata sehingga kita dapat menggunakan nilai tengah dari setiap kelas interval. Mari, kita lihat soal berikut.

Eksplorasi 6.10 Varian dalam Data Kelompok



Ayo, Bereksplorasi

Dari suatu penelitian mengenai lamanya baterai HP, diperoleh data sebagai berikut.

Tabel 6.11 Tabel Distribusi Frekuensi Data Kelompok Durasi Baterai HP

Durasi Baterai (jam)	6–10	11–15	16–20	21–25	26–30
Frekuensi	2	10	18	45	5

Tentukanlah varian dan simpangan dari durasi baterai tersebut.

Untuk data berkelompok, maka kita perlu menentukan nilai tengah dari masing-masing kelas terlebih dahulu. Lalu mencari nilai Σx dan Σx^2 . Agar lebih mudah, kita tempatkan semua nilai dalam tabel berikut.

Durasi Baterai (jam)	Nilai Tengah, x_i	Frekuensi, f	$f \cdot x_i$	$f \cdot x_i^2$
6–10	8	2	16	128
11–15	13	10	130	1.690
16–20	18	18	324	5.832
21–25	23	45	1.035	23.805
26–30	28	5	140	3.920
		80	1.645	35.375

Dari tabel di atas kita memperoleh:

$$\Sigma f = 80 \qquad \Sigma(fx) = 1.645 \qquad \Sigma(fx^2) = 35.375$$

$$\text{Maka varian } \sigma^2 = \frac{\Sigma(fx^2)}{\Sigma(f)} - \left(\frac{\Sigma(fx)}{\Sigma(f)} \right)^2 = \frac{35.375}{80} - \left(\frac{1.645}{80} \right)^2 = 19,37$$

$$\text{Simpangan baku } \sigma = \sqrt{19,37} = 4,4$$

Latihan 6.7

1. Dari suatu survei tentang banyaknya buku yang dibaca oleh siswa SMA dalam 1 bulan, diperoleh hasil yang diambil secara acak. Banyaknya buku yang dibaca 7 orang siswa adalah sebagai berikut.

3 4 6 2 8 8 5

Tentukanlah varian dan simpangan dari data tersebut.

2. Sebelum pandemi Covid-19, sekolah mencatat waktu yang diperlukan oleh siswa untuk makan siang di kantin (dibulatkan ke menit terdekat). Hasilnya adalah sebagai berikut:

Waktu yang diperlukan, t (menit)	35	36	37	38
Frekuensi	3	17	29	34

- a. Tentukanlah rata-rata dari data tersebut.
 - b. Tentukanlah simpangan bakunya.
3. Diketahui sekumpulan data memiliki data-data sebagai berikut.

$$\Sigma x = 24$$

$$\Sigma x^2 = 78$$

$$n = 8$$

Carilah:

- a. *mean*
 - b. Varian, σ^2
 - c. Simpangan baku, σ
4. Dari data kelompok pertama yang terdiri atas 10 bilangan diperoleh sebagai berikut.

$$\Sigma x = 50$$

$$\Sigma x^2 = 310$$

Sedangkan kelompok kedua yang terdiri atas 15 bilangan diperoleh sebagai berikut.

$$\Sigma x = 86$$

$$\Sigma x^2 = 568$$

Tentukanlah *mean* dan simpangan baku dari gabungan kedua kelompok tersebut yang terdiri atas 25 bilangan.

5. Guru berbeda mengajar 2 kelas yang berbeda, kelas A dan kelas B, dengan beda metode mengajar. Siswa dari kedua kelas tersebut

mengikuti ujian yang sama pada akhir semester. Berikut hasil ujian dari kedua kelas.

Hasil Ujian	20–29	30–39	40–49	50–59	60–69	70–79	80–89
Frekuensi A	1	3	6	6	11	10	8
Frekuensi B	1	2	4	13	15	6	3

- Hitunglah *mean* dari masing-masing kelompok.
- Dari hasil a, menurutmu, apakah metode guru yang satu lebih baik dari metode guru lainnya? Jelaskan alasan dari jawabanmu.

Refleksi

Dalam bab ini, kamu sudah belajar mengenai ukuran pemusatan dan ukuran lokasi dari suatu kelompok data dan menggunakan berbagai ukuran tersebut dalam melakukan pengambilan keputusan.

- Bagaimana menemukan *mean*, modus, dan median data kelompok?
- Bagaimana menemukan ukuran lokasi seperti persentil dan kuartil dalam data tunggal?
- Bagaimana memilih ukuran pemusatan yang tepat dan sesuai dengan konteks masalah?

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi
Republik Indonesia, 2023

Matematika untuk SMA/MA/SMK/MAK Kelas X (Edisi Revisi)

Penulis: Dicky Susanto, dkk.
ISBN: 978-623-118-558-7

Bab

7

Peluang



Bagaimana kamu dapat memprediksi kemungkinan terjadinya sebuah peristiwa dengan menggunakan matematika?

Tujuan Pembelajaran

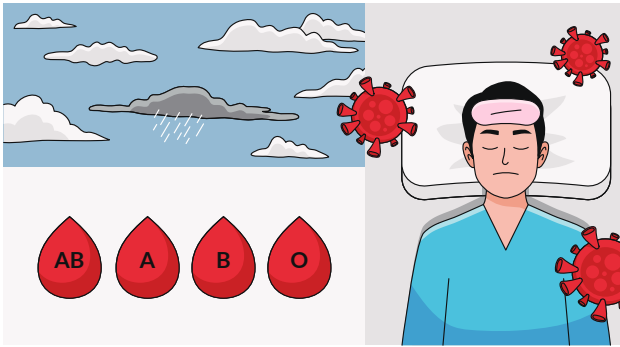
Setelah mempelajari bab ini, diharapkan kamu dapat menentukan ruang sampel dan distribusi peluang kejadian; membedakan antara frekuensi relatif dan frekuensi harapan, menggunakan frekuensi harapan untuk memprediksi peluang suatu kejadian, membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas, menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas, memodifikasi aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas.

Kata Kunci

- ruang sampel
- kejadian saling bebas
- frekuensi harapan
- kejadian saling lepas

Peta Materi





Seberapa besar kemungkinan akan turun hujan? Berapa persen kemungkinan seseorang terpapar Covid-19? Berapa persen kemungkinan seseorang memiliki golongan darah AB? Semua pertanyaan

ini berhubungan dengan kemungkinan suatu kejadian yang merupakan bagian dari kehidupan kita sehari-hari. Kamu dapat memprediksi kemungkinan suatu kejadian dengan menggunakan salah satu bidang Matematika yang disebut **peluang**.

Peluang adalah suatu ukuran tentang kemungkinan suatu kejadian (*event*) yang akan terjadi (atau tidak terjadi) di masa mendatang. Dalam bab ini, kamu akan mempelajari mengenai ruang sampel dan distribusi peluang, dan menggunakan aturan penjumlahan untuk menemukan peluang bahwa peristiwa A terjadi atau peristiwa B terjadi.



Ayo, Mengingat Kembali

Peluang Sederhana

- Jika sebuah kejadian tidak mungkin terjadi, maka peluangnya 0.
- Jika sebuah kejadian pasti terjadi, maka peluangnya 1.
- Peluang memiliki nilai antara 0 dan 1 inklusif (0 dan 1 termasuk).
- Peluang dituliskan dalam bentuk pecahan atau desimal.
- Ruang sampel adalah himpunan semua hasil yang mungkin dalam suatu percobaan (eksperimen) peluang dan diberikan lambang S .
- Banyaknya semua anggota S ditulis dengan simbol $n(S)$.
- Titik sampel adalah anggota dari ruang sampel.
- Peluang terjadinya kejadian A adalah $\frac{n(A)}{n(S)}$, di mana $n(A)$ adalah banyaknya anggota dalam kejadian A dan $n(S)$ adalah banyaknya anggota dalam himpunan ruang sampel.

A. Distribusi Peluang



Gambar 7.1
Berbagai Permainan Papan (Board Game)

Sumber: Wilhei/Pixabay (2015); Meghmollar2017/commons.wikimedia.org (2020); Jorge Franganillo/commons.wikimedia.org (2019); F1 Digitals/Pixabay (2018)

Dalam mendesain permainan, perlu dipastikan bahwa peluang untuk menang sama besarnya untuk setiap pemain. Sering kali permainan tersebut menggunakan dadu untuk menentukan jumlah langkah. Dadu memiliki bentuk simetris dan dengan asumsi dadu tersebut adil sehingga setiap sisi memiliki kemungkinan yang sama besarnya saat dadu dilempar.

Eksplorasi 7.1 Distribusi Peluang



Ayo, Bereksplorasi

Misalnya kamu melempar dua buah dadu yang memiliki warna berbeda, satu merah dan satu putih.

1. Ayo salin dan lengkapi **Tabel 7.1** untuk menunjukkan semua kemungkinan hasil melemparkan sekali kedua dadu tersebut.

Gambar 7.2 Ruang Sampel untuk Kejadian Melempar Dadu Merah dan Dadu Putih

		Angka pada Dadu Putih					
		1	2	3	4	5	6
Angka pada Dadu Merah	1	1, 1					
	2						
	3		3, 2				
	4					4, 5	
	5						
	6						



Ayo, Berdiskusi

Apa arti 3, 2? Apakah berbeda dengan 2, 3? Mengapa?

2. Apakah semua hasil sama kemungkinannya?



Ayo, Berpikir Kritis

Jika kedua dadu memiliki warna yang sama, apakah hasil kemungkinan tetap sama? Jelaskan.

3. Apakah peluang mendapatkan angka yang sama pada kedua dadu adalah sama besarnya dengan peluang mendapatkan angka yang berbeda dengan peluang mendapatkan angka yang berbeda?
4. Berapa peluang mendapatkan setidaknya satu dadu yang menunjukkan angka 5?
5. Mana yang lebih memungkinkan, mendapatkan setidaknya satu angka 4 atau mendapatkan dua angka yang sama? Jelaskan.



Ayo, Menggunakan Teknologi

Kamu dapat melakukan pelemparan dadu secara daring di <https://buku.kemdikbud.go.id/s/tkbath>.

Tabel 7.1 pada Eksplorasi disebut sebagai ruang sampel untuk situasi melempar dua dadu. Sebuah **ruang sampel** merupakan himpunan semua kemungkinan hasil. Untuk dadu yang adil, semua 36 hasil pada ruang sampel sama kemungkinannya untuk terjadi. **Sama kemungkinan** artinya setiap hasil memiliki peluang yang sama untuk terjadi. Ketika hasil sama kemungkinannya, peluang sebuah kejadian ditentukan oleh

$$P_{\text{kejadian}} = \frac{\text{jumlah kejadian yang diinginkan}}{\text{jumlah hasil yang mungkin}}$$

Contoh:

Peluang jumlah 11 adalah $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Peluang angka 2 di setidaknya satu dadu atau berjumlah 2 adalah $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Peluang angka sama dan berjumlah 8 adalah $\frac{1}{36}$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Peluang angka sama atau berjumlah 8 adalah $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Peluang jumlah tidak lebih daripada 9 adalah $\frac{30}{36} = \frac{5}{6}$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Peluang jumlah setidaknya 9 adalah $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

Latihan 7.1

1. Coba kamu tentukan peluang untuk kejadian berikut.
 - a. jumlah 2 atau 3
 - b. jumlah lebih besar daripada 3
 - c. jumlah setidaknya 3
 - d. jumlah lebih kecil daripada 3
2. **Distribusi peluang** adalah deskripsi dari semua kemungkinan hasil dari situasi acak bersama dengan peluang terjadinya masing-masing. Distribusi peluang berbeda dari ruang sampel karena semua hasil harus berupa angka tunggal dan peluang harus ditentukan. Misalnya, **Tabel 7.2** distribusi peluang di bawah ini menunjukkan semua kemungkinan jumlah yang dapat diperoleh dari lemparan dua dadu.

Tabel 7.1 Distribusi Peluang untuk Jumlah Dua Dadu

Jumlah	Peluang
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	

Salin dan lengkapi distribusi peluang ini dengan mengisi peluangnya.

- a. Berapa jumlah dari semua peluang?
- b. Bagaimana kamu dapat menggunakan tabel distribusi peluang untuk mencari peluang pada soal nomor 1?

Latihan 7.2

1. Misalnya kamu melempar dua dadu dan mencatat angka yang lebih besar daripada dua dadu tersebut. (Jika angkanya sama, catat angka tersebut.)
 - a. Gunakan ruang sampel pada **Eksplorasi 7.1** untuk membantumu melengkapi tabel distribusi peluang untuk situasi ini.

Angka yang Lebih Besar	Peluang
1	
2	
3	
4	

- b. Berapa peluang bahwa angka yang lebih besarnya adalah 3? Adalah 2 atau 3? Adalah 3 atau kurang? Adalah lebih dari 3?
2. Sekarang misalnya kamu melempar dua dadu dan mencatat nilai mutlak dari selisih kedua bilangan.
 - a. Gunakan ruang sampel pada **Eksplorasi 7.1** untuk membantumu melengkapi tabel distribusi peluang untuk situasi ini.

Nilai Mutlak dari Selisih Dua Dadu	Peluang
0	

- b. Berapa peluang bahwa nilai mutlak dari selisihnya adalah 3? Adalah 2 atau 3? Adalah setidaknya 2? Adalah tidak lebih dari 2?



Ayo, Mencoba

Sekarang kamu mencoba sendiri menentukan distribusi peluang untuk kejadian melempar dua keping uang logam dengan dua kemungkinan hasil {gambar, angka} dengan membuat tabel seperti di bawah ini.



Gambar 7.3 Gambar Uang Logam dengan Dua Sisinya

Tabel 7.2 Distribusi Peluang untuk Jumlah Gambar pada Uang Logam

Jumlah Gambar	Peluang
0	
1	
2	



Ayo, Berpikir Kritis

Seorang temanmu mengatakan bahwa untuk hasil kali dua dadu, peluang mendapatkan bilangan genap lebih besar daripada peluang mendapatkan bilangan ganjil. Setujukah kamu dengan dia? Jelaskan.



Ayo, Berdiskusi

Diskusikan apa yang dikatakan para siswa. Kamu lebih setuju dengan siapa?



Gambar 7.4 Perbincangan Siswa Mengenai Peluang



Ayo, Berefleksi

Pada bagian ini, kamu telah belajar bagaimana membuat distribusi peluang dari ruang sampel dari hasil yang sama kemungkinannya.

- Apa perbedaan antara ruang sampel dan distribusi peluang?
- Mengapa hasil dari ruang sampel melempar dua dadu sama kemungkinannya?

B. Aturan Penjumlahan

Eksplorasi 7.2 Aturan Penjumlahan



Ayo, Bereksplorasi

Pada eksplorasi sebelumnya, kamu membuat distribusi peluang untuk jumlah dari dua dadu. Kamu menemukan bahwa untuk menentukan peluang untuk hasil penjumlahan dua dadu mendapat 3 atau 4, kamu dapat menjumlahkan peluang untuk mendapatkan jumlah 3 dengan peluang mendapatkan jumlah 4, yaitu $\frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{5}{36}$. Saat mengerjakan eksplorasi ini, pikirkan jawaban untuk pertanyaan berikut: *Dalam kondisi apa kamu dapat*

menjumlahkan masing-masing peluang kejadian untuk menentukan peluang dari kejadian yang berhubungan?

Ada siswa yang menggunakan hanya satu moda transportasi ke sekolah, tetapi ada pula yang menggunakan beberapa moda transportasi. Ayo, salin dan lengkapi tabel berikut untuk moda transportasi yang digunakan oleh semua siswa di kelasmu hari ini ke sekolah. (Catatan: Jika menggunakan lebih dari satu, pilih yang jarak terpanjang.)



Ayo, Bekerja Sama

Pikirkan cara mengumpulkan informasi ini dengan efisien.

Tabel 7.3 Jumlah Siswa Sesuai dengan Moda Transportasi yang Digunakan ke Sekolah pada Hari Ini

Moda Transportasi yang Digunakan ke Sekolah Hari Ini	Jumlah Siswa
Jalan kaki	
Sepeda	
Motor	
Mobil	
Kendaraan Umum	

Sekarang lengkapi tabel berikut dengan mencatat jumlah siswa di kelasmu yang dapat menggunakan moda transportasi tersebut (bisa lebih dari satu).

Tabel 7.4 Jumlah Siswa sesuai dengan Moda Transportasi yang Dapat Digunakan ke Sekolah

Moda Transportasi yang Dapat Digunakan ke Sekolah	Jumlah Siswa
Jalan kaki	
Sepeda	
Motor	
Mobil	
Kendaraan Umum	

Dalam matematika, kata “atau” berarti “salah satu atau kedua-duanya”. Maka, kejadian bahwa seorang siswa menggunakan sepeda atau menggunakan motor ke sekolah termasuk semua hasil berikut.

- Siswa tersebut dapat menggunakan sepeda, tetapi tidak dapat menggunakan motor ke sekolah.
- Siswa tersebut dapat menggunakan motor, tetapi tidak dapat menggunakan sepeda ke sekolah.
- Siswa tersebut dapat menggunakan baik sepeda maupun motor ke sekolah.



Ayo, Berdiskusi

Diskusikan pertanyaan-pertanyaan ini dengan pasangan atau teman kelompok dan bersiap untuk mempresentasikan hasilnya.

1. Tentukan manakah dari pertanyaan berikut ini yang dapat kamu jawab dengan hanya menggunakan data dari tabel. Kemudian, jawablah pertanyaan tersebut.
 - a. Berapa peluang seorang siswa yang dipilih secara acak dari kelasmu yang hari ini menggunakan sepeda atau motor ke sekolah?
 - b. Berapa peluang seorang siswa yang dipilih secara acak dari kelasmu yang biasanya menggunakan sepeda atau motor ke sekolah?
2. Mengapa pertanyaan lain di nomor 1 tidak dapat dijawab hanya dengan menggunakan informasi pada tabel? Informasi apa yang dibutuhkan untuk menjawab pertanyaan tersebut?

Pada **Eksplorasi 7.1**, kamu dapat menjawab pertanyaan “atau” dengan menjumlahkan peluang masing-masing. Demikian juga untuk tabel pertama dari **Eksplorasi 7.2** di mana masing-masing siswa hanya boleh memilih satu jawaban. Tidaklah demikian dengan tabel kedua di mana siswa boleh memilih lebih dari satu jawaban. Karakteristik apa dari tabel yang memungkinkan untuk menjumlahkan untuk menjawab sebuah pertanyaan “atau”? Perbedaannya adalah antara kejadian yang saling lepas dan yang tidak saling lepas.

Dua kejadian dikatakan **saling lepas** (atau **disjoint**) jika tidak mungkin bagi keduanya untuk terjadi pada hasil yang sama. Misalnya, perhatikan kejadian berikut ini. Manakah yang merupakan dua kejadian yang saling lepas dari contoh-contoh berikut ini?



Ayo, Berpikir Kritis

Pikirkan pertanyaan ini sendiri kemudian diskusikan dengan berpasangan atau anggota kelompok lainnya.

- Melemparkan sepasang dadu dan mendapatkan jumlah 7; mendapatkan angka yang sama pada saat yang sama.
- Melemparkan sepasang dadu dan mendapatkan jumlah 8; mendapatkan angka yang sama pada saat yang sama.
- Abi menggunakan mobil ke sekolah hari ini; Abi menggunakan kendaraan umum ke sekolah hari ini.
- Zain menggunakan motor ke sekolah hari ini; Zain menggunakan sepeda ke sekolah.



Ayo, Berpikir Kritis

Secara teoretis, peluang untuk mendapatkan angka genap adalah $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, namun ketika dilakukan percobaan, hasilnya bisa berbeda. Misalnya, ketika melakukan percobaan melempar dadu sebanyak 20 kali, frekuensi munculnya angka genap adalah 8 kali. Berapa peluang dari hasil percobaan tersebut? Coba pikirkan jawabannya sebelum melanjutkan ke bagian berikut.

Jika jawabanmu adalah $\frac{8}{20}$ atau $\frac{2}{5}$, maka kamu benar. Peluang dari hasil percobaan atau eksperimen disebut juga frekuensi relatif, dan didapatkan dengan membagi jumlah kejadian yang diinginkan dengan jumlah percobaan yang dilakukan. Tentu dengan makin banyak percobaan yang dilakukan, maka hasilnya akan makin mendekati peluang teoretis. (Catatan: Kamu dapat mencoba melakukan percobaan yang banyak dengan melibatkan teman sekelasmu).



Ayo, Berdiskusi

Berdasarkan frekuensi relatif yang didapat dari hasil percobaan melempar dadu di atas, berapa kali kamu dapat mengharapkan munculnya angka genap jika dilakukan percobaan sebanyak 66 kali? Bagaimana dengan 200 kali? Coba diskusikan dengan temanmu sebelum melanjutkan ke bagian berikut.

Frekuensi relatif pelemparan angka genap pada percobaan melempar dadu di atas adalah 40% atau 0,4. Kamu dapat mengharapkan munculnya angka genap sebesar 40%. Untuk percobaan 66 kali melempar dadu, maka 40% dari 66 adalah 26,4 dan untuk percobaan 200 kali melempar dadu, 40% dari 200 adalah 80. Artinya, jika kamu melempar dadu yang sama sebanyak 66 kali, kamu akan mendapatkan angka genap sebanyak 26 kali dan jika kamu melemparnya 200 kali, kamu akan mendapatkan angka genap sebanyak 80 kali. Ini disebut dengan **frekuensi harapan**, yaitu berapa banyak kali hasil yang diharapkan akan muncul. Perlu diingat meskipun kamu berharap mendapatkan angka genap sebanyak 80 kali, hal ini tidak dijamin, dan hasil sebenarnya mungkin akan berbeda.

Latihan 7.3

1. Ali melakukan percobaan melempar dadu sebanyak 100 kali dan hasil munculnya angka lima (5) adalah 14 kali.
 - a. Tentukan peluang percobaan mendapatkan angka lima, dan jawablah dengan pecahan dalam bentuk paling sederhana.
 - b. Ubah jawaban a) dalam bentuk persen.
 - c. Dari hasil percobaan tersebut, jika akan dilakukan percobaan sebanyak 200 kali, berapa kali diharapkan (frekuensi harapan) untuk mendapatkan angka lima?

2. Sebuah pabrik lampu pijar mengadakan uji coba untuk menentukan rata-rata berapa lama lampu pijar dapat bertahan menyala. Hasil uji coba tersebut ditampilkan pada tabel berikut.

Jumlah Jam Lampu Pijar Menyala, h	Frekuensi
$0 \leq h < 1000$	30
$1000 \leq h < 2000$	75
$2000 \leq h < 3000$	160
$3000 \leq h$	35

- a. Hitung frekuensi relatif dari pengujian lampu pijar yang kurang dari 3.000 jam, tetapi lebih dari 1.000 jam.
- b. Jika ada pesanan 2.000 dari lampu ini, berapa banyak yang diharapkan (frekuensi harapan) dapat menyala lebih dari 3.000 jam?
3. Sebuah survei dilakukan yang meminta responden memilih satu dari lima kategori film yang disukai. Hasilnya ditampilkan pada tabel berikut ini.

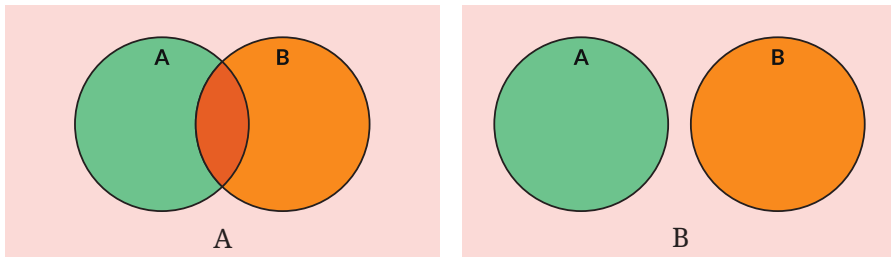
Jenis Film	Frekuensi
Komedi	14
Petualangan	28
Aksi laga	20
Horor	5
Lain-lain	13

- a. Berapa banyak responden yang ikut dalam survei ini?
- b. Satu orang lagi bergabung sebagai responden dan diberikan pertanyaan yang sama. Perkirakan peluang orang tersebut akan memilih 'petualangan'.

- c. Survei ini dilakukan di sebuah daerah dengan total populasi 480 penduduk. Jika setiap orang pada daerah tersebut mengisi survei, perkirakan jumlah orang yang akan memilih ‘horor’.
4. Hasil penelitian menunjukkan bahwa peluang seseorang kidal (yaitu dominan menggunakan tangan kiri) adalah 0,23. Berapa banyak orang yang tidak kidal yang diharapkan dari sebuah populasi terdiri atas 10.000 penduduk?

1. Dua Kejadian A dan B Saling Lepas

- a. Menurutmu diagram Venn manakah berikut ini yang menggambarkan situasi dua kejadian yang saling lepas?



Gambar 7.5 Diagram Venn untuk Dua Kejadian

- b. Untuk dua kejadian A dan B saling lepas, apa peluang bahwa A **dan** B terjadi pada hasil yang sama? Peluang ini ditulis $P(A \text{ dan } B)$ atau $P(A \cap B)$.
- c. Ketika A dan B saling lepas, bagaimana caramu menentukan peluang bahwa A terjadi **atau** B terjadi (atau keduanya terjadi)? Peluang ini ditulis $P(A \text{ atau } B)$ atau $P(A \cup B)$.



Petunjuk

Perhatikan diagram Venn, apakah ada daerah yang menggambarkan dua kejadian tersebut sekaligus?

Secara simbolis kamu dapat menuliskan aturan untuk menghitung peluang bahwa A terjadi **atau** B terjadi dengan $P(A \cup B) = P(A \text{ atau } B)$. Peraturan ini disebut **aturan penjumlahan untuk kejadian saling lepas**.

2. Dua Kejadian A dan B Tidak Saling Lepas

- Pada **Gambar 7.4**, diagram mana yang menggambarkan situasi dua kejadian yang tidak saling lepas?
- Untuk dua kejadian A dan B yang tidak saling lepas, apa peluang bahwa A **dan** B terjadi pada hasil yang sama, yaitu $P(A \cap B)$?
- Di manakah peluang ini dinyatakan pada diagram Venn yang kamu pilih?

Lihat kembali pekerjaanmu pada **Eksplorasi 7.2**. Dengan diagram Venn, jelaskan bagaimana kamu dapat memodifikasi aturanmu dari soal bagian A untuk dua kejadian saling lepas untuk menghitung $P(A \cup B)$ ketika A dan B tidak saling lepas.

Secara simbolis kamu dapat menuliskan aturan untuk menghitung $P(A \cup B)$ untuk dua kejadian tidak saling lepas dengan $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Aturan ini disebut **aturan penjumlahan**.



Petunjuk

Perhatikan luas daerah peluang kejadian A dan luas daerah peluang kejadian B pada diagram Venn dan bandingkan dengan luas daerah peluang A atau B.

Latihan 7.4

Gunakan aturan penjumlahan untuk soal-soal berikut mengenai sepasang dadu yang dilempar.

- Tentukan peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 5.
 - Apakah kedua kejadian ini saling lepas atau tidak saling lepas?
 - Peluang mendapatkan dua angka sama adalah $P(A) = \frac{?}{36}$.
 - Peluang mendapatkan jumlah 5 adalah $P(A) = \frac{?}{36}$.
 - Peluang mendapatkan dua angka sama **dan** berjumlah 5, $P(A \cap B) = \dots$
 - Maka peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 5 adalah ...
- Tentukan peluang mendapatkan dua angka sama atau berjumlah 2.
 - Apakah kedua kejadian ini saling lepas atau tidak saling lepas?
 - Tentukan peluang mendapatkan dua angka sama, peluang mendapatkan jumlah 2, dan peluang mendapatkan dua angka yang sama dan berjumlah 2.

3. Tentukan peluang bahwa nilai mutlak dari selisihnya adalah 2 atau mendapatkan jumlah 5.
4. Tentukan peluang bahwa nilai mutlak dari selisihnya adalah 2 atau mendapatkan jumlah 11.



Petunjuk

Lihat **Latihan 7.2** nomor 2.

Melalui **Eksplorasi 7.2**, kamu telah belajar bagaimana menghitung peluang untuk terjadinya peristiwa A atau peristiwa B.



Ayo, Berefleksi

Apa perbedaan dua kejadian yang saling lepas dan yang tidak saling lepas berdasarkan aturan penjumlahannya? Mengapa?



Ayo, Berpikir Kreatif

Berikan sebuah contoh dua kejadian yang saling lepas yang berbeda dari yang di eksplorasi.

C. Aturan Perkalian

Eksplorasi 7.3 Aturan Perkalian



Ayo, Bereksplorasi

Perhatikan masalah berikut: Berapa peluang mendapatkan tepat dua kali pelemparan sepasang dadu sehingga menghasilkan angka yang sama (dobel) pertama kalinya?

5. Jelaskan mengapa masuk akal untuk melabel baris dari model luas pada gambar di bawah. Berikan label pada enam kolom untuk menyatakan hasil yang mungkin pada lemparan dadu kedua.

		Lemparan Kedua Sepasang Dadu					
		...	...	...	...	...	...
Lemparan Pertama Sepasang Dadu	Kedua Angka Sama (Dobel)						
	Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel)						
	Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel)						
	Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel)						
	Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel)						
	Kedua Angka Tidak Sama (Tidak Dobel)						

- Arsir kotak yang menyatakan kejadian tidak mendapatkan angka yang sama pada lemparan pertama dan mendapatkan angka yang sama pada lemparan kedua.
- Berapa peluang tidak mendapatkan angka yang sama pada lemparan pertama dan kemudian mendapatkan angka yang sama pada lemparan kedua?
- Gunakan model luas untuk menentukan peluang mendapatkan angka yang sama pada kedua lemparan.
- Gunakan model luas untuk menentukan peluang tidak mendapatkan angka yang sama pada kedua lemparan.

Pasangan kejadian pada masalah di atas adalah **saling bebas**, yaitu kejadian yang satu tidak memengaruhi peluang kejadian yang lainnya.



Ayo, Berdiskusi

Jelaskan bagaimana kamu dapat menghitung peluang tanpa menggunakan model luas.

Misalnya A dan B adalah kejadian saling bebas. Nyatakan metode yang kamu hasilkan dengan melengkapi aturan berikut menggunakan simbol:

$$P(A \text{ dan } B) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Notasi $P(A \text{ dan } B)$ dibaca “peluang untuk kejadian A dan kejadian B.”

Kadangkala masalah peluang lebih mudah dipahami jika dituliskan dalam bentuk kata-kata yang lebih spesifik dari kata-kata yang digunakan pada soal. Misalnya, untuk masalah eksplorasi di atas:

Berapa peluang mendapatkan tepat dua kali pelemparan sepasang dadu sehingga menghasilkan angka yang sama?

Masalah ini dapat dinyatakan dan diselesaikan dengan cara berikut:

$$\begin{aligned} &P(\text{tidak dobel pada lemparan pertama dan dobel pada lemparan kedua}) = \\ &P(\text{tidak dobel pada lemparan pertama}) \cdot P(\text{dobel pada lemparan kedua}) = \\ &\left(\frac{5}{6}\right) \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{36} \end{aligned}$$

Melalui eksplorasi di atas, kamu mendapatkan jika dua kejadian adalah saling bebas, maka untuk menentukan peluang terjadinya kedua kejadian tersebut dapat menggunakan aturan perkalian. Perlu diperhatikan bahwa aturan ini tidak berlaku jika kedua kejadian tidak saling bebas. Misalnya, kamu mengambil bola dari sebuah tas yang berisi bola berwarna berbeda. Pilihan bola pertama tidak memengaruhi pilihan bola kedua. Namun jika setelah ambil bola pertama, kamu tidak mengembalikan bola pertama, maka kejadiannya tidak saling bebas. Ada satu bola lebih sedikit untuk pilihan kedua sehingga peluangnya akan berubah.

Catatan: Kamu dapat menghitung peluang terjadinya dua kejadian yang saling bebas, A dan B, baik ketika kedua kejadian tersebut terjadi secara berurutan, maupun terjadi pada saat yang bersamaan.

$$P(A \text{ terjadi lalu } B \text{ terjadi}) = P(A) \times P(B)$$

atau

$$P(A \text{ dan } B) = P(A) \times P(B)$$

Misalnya, ketika melempar dua koin dapat dilakukan dengan melempar koin pertama baru kemudian melempar koin kedua, atau dapat juga kedua koin dilempar pada waktu bersamaan.

Latihan 7.5

1. Kirana sedang memainkan sebuah permainan yang menggunakan dadu. Dia harus melemparkan sepasang dadu dan mendapatkan angka dobel dan pada lemparan kedua mendapatkan jumlah enam. Dia ingin tahu berapa peluang ini dapat terjadi.

- a. Manakah opsi berikut paling baik menjelaskan peluang yang ingin ditentukan oleh Kirana?

Opsi 1:

P (lemparan pertama angka dobel atau lemparan kedua jumlah enam)

Opsi 2:

P (lemparan pertama angka dobel dan lemparan kedua jumlah enam)

Opsi 3:

P (angka dobel dan jumlah enam)

- b. Jelaskan mengapa aturan perkalian dapat digunakan untuk menentukan peluang ini? Berapa peluangnya?
2. Sani dan Oka sedang bermain bola basket. Peluang bagi Sani untuk memasukkan bola dalam keranjang adalah 0,1, sedangkan untuk Oka 0,2. Keberhasilan atau kegagalan Sani dan Oka memasukkan bola saling bebas. Sani dan Oka masing-masing melemparkan bola sekali. Berapa peluang bahwa:
 - a. Keduanya memasukkan bola dalam keranjang
 - b. Sani memasukkan bola dalam keranjang, tetapi Oka tidak
3. Sebuah dadu dilempar dua kali. Hitung peluang untuk mendapatkan
 - a. keduanya angka enam.
 - b. dua angka genap

- c. kedua angka yang sama
 - d. kedua angka berbeda
4. Sebuah tas berisi 12 bola dengan warna sebagai berikut: lima bola merah dan selebihnya berwarna biru. Sebuah bola diambil secara acak dari dalam tas. Bola tersebut kemudian dikembalikan ke dalam tas, dan bola kedua diambil. Warna masing-masing bola dicatat.
- a. Daftarkan semua kemungkinan dari percobaan ini.
 - b. Hitung peluang berikut ini.
 - 1) Bola pertama biru
 - 2) Bola kedua merah
 - 3) Bola pertama biru dan bola kedua merah
 - 4) Kedua bola memiliki warna yang sama
 - 5) Kedua bola memiliki warna yang berbeda
 - 6) Kedua bola bukan merah
 - 7) Setidaknya satu bola merah



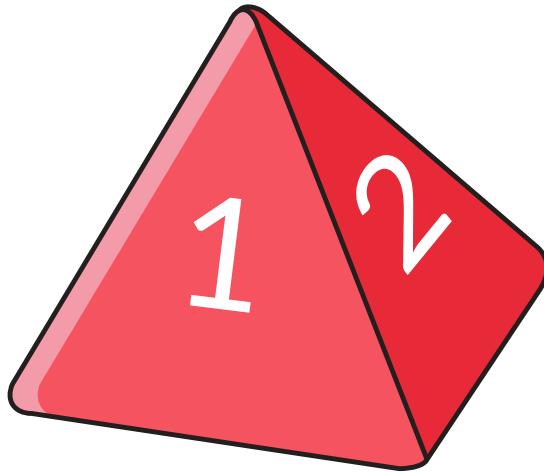
Ayo, Berefleksi

1. Bagaimana kamu dapat menggunakan model luas untuk menentukan peluang dua kejadian yang saling bebas?
2. Mengapa masuk akal untuk mengalikan masing-masing peluang dari dua kejadian saling bebas untuk mendapatkan peluang untuk kedua kejadian terjadi bersama?

Latihan 7.6

1. Misalnya kamu melemparkan uang logam tiga kali.
 - a. Buatlah daftar ruang sampel untuk semua 8 hasil yang mungkin. Sebagai contoh, salah satu hasil adalah gambar, angka, angka (GAA).
 - b. Apakah hasil di dalam ruang sampelmu sama besar kemungkinan terjadinya? Jelaskan.
 - c. Buatlah tabel distribusi peluang untuk jumlah gambar. Apa peluang untuk mendapatkan tepat 2 gambar? Paling banyak 2 gambar?

2. Yang manakah dari pasangan peristiwa berikut ini yang saling lepas?
Jelaskan alasannya.
 - a. Melempar sepasang dadu: mendapatkan jumlah 6; mendapatkan satu dadu 6.
 - b. Melemparkan uang logam 7 kali: mendapatkan tepat 3 gambar; mendapatkan tepat 5 gambar.
 - c. Melemparkan uang logam 7 kali: mendapatkan setidaknya 3 gambar; mendapatkan setidaknya 5 gambar.
3. Gunakan bentuk yang sesuai dari aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dari melempar sepasang dadu dan
 - a. mendapatkan jumlah 6 atau mendapatkan satu dadu dengan 6,
 - b. mendapatkan jumlah 6 atau mendapatkan angka yang untuk:
4. Misalnya kamu melemparkan sebuah dadu dan kemudian melemparkannya kembali. Dadu berbentuk tetrahedron (limas segitiga) beraturan dan terdapat angka 1, 2, 3, dan 4 pada sisinya.

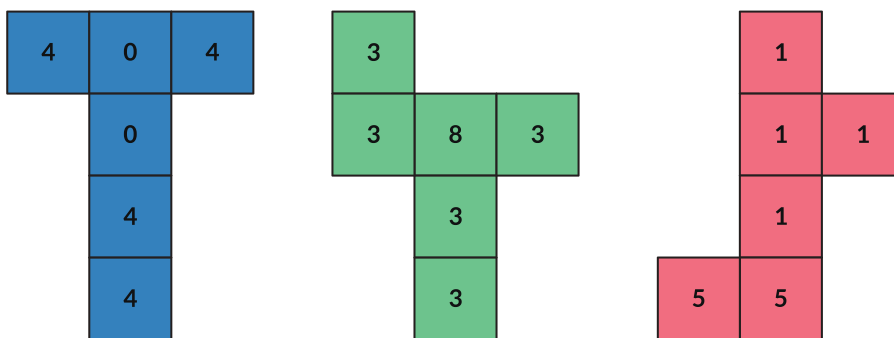


Gambar 7.6 Dadu Berbentuk Limas Segitiga

- a. Buatlah bagan yang menunjukkan ruang sampel dari semua kemungkinan hasilnya.
- b. Ada berapa hasil kemungkinan? Apakah semua sama besar kemungkinannya?

- c. Buatlah tabel distribusi peluang untuk selisih dari kedua dadu (dadu pertama-dadu kedua). [Keterangan: Bukan nilai mutlak dari selisih]
 - d. Selisih apa yang paling mungkin kamu dapatkan?
 - e. Berapa peluang bahwa selisihnya paling besar 2?
5. Misalnya kamu melemparkan dadu berbentuk tetrahedron (limas segitiga beraturan) dan sebuah dadu biasa (berbentuk kubus dengan enam sisi) pada saat yang sama.
 - a. Buatlah bagan yang menunjukkan ruang sampel dari semua hasil yang mungkin.
 - b. Berapa banyak hasil yang mungkin? Apakah semuanya sama besar kemungkinannya?
 - c. Buatlah tabel untuk distribusi peluang dari jumlah kedua dadu.
 - d. Jumlah apa yang paling mungkin didapat?
 - e. Berapa peluang bahwa jumlahnya paling banyak 3?
6. Gunakan hasil kerjamu pada soal nomor 4 dan bentuk yang sesuai dari aturan penjumlahan untuk menjawab pertanyaan berikut yang berhubungan dengan melempar dua dadu tetrahedron.
 - a. Berapa peluang mendapatkan selisih 3 atau mendapatkan 2 pada dadu pertama?
 - b. Berapa peluang mendapatkan selisih 2 atau mendapatkan angka yang sama?
 - c. Berapa peluang mendapatkan selisih 0 atau mendapatkan angka yang sama?
 - d. Berapa peluang mendapatkan selisih 0 atau jumlah 6?
7. Untuk kasus dua dadu dilempar dua kali, pertimbangkan peluang mendapatkan dua angka yang sama pada lemparan pertama atau pada lemparan kedua.
 - a. Apakah benar bahwa peluang mendapatkan dua angka yang sama pada lemparan pertama atau pada lemparan kedua adalah $\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$? Berikan penjelasan untuk jawabanmu.
 - b. Apakah benar bahwa peluang mendapatkan dua angka yang sama pada setidaknya satu dari enam giliran adalah $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$?

8. Misalnya kamu melemparkan uang logam empat kali dan mencatat gambar (G) atau angka (A) sesuai urutan munculnya.
 - a. Buatlah daftar semua 16 hasil yang mungkin.
 - b. Apakah hasil ini sama besar kemungkinannya?
 - c. Buatlah tabel distribusi peluang untuk jumlah gambar.
 - d. Berapa peluang yang kamu dapatkan tepat 2 gambar? Paling banyak 2 gambar?
9. Perhatikan dadu khusus yang ditunjukkan sisi-sisinya sebagai berikut. Misalnya dalam sebuah permainan kamu memilih salah satu dadu, dan temanmu memilih satu dari sisanya. Masing-masing melemparkan dadunya. Siapa yang mendapatkan angka yang lebih besar memenangkan permainan.



Gambar 7.7 Jaring-Jaring Berbagai Dadu

Misalnya temanmu memilih dadu biru. Supaya kesempatan menang lebih besar, dadu mana yang kamu akan pilih? Jika temanmu memilih dadu hijau, dadu mana yang kamu akan pilih? Jika temanmu memilih dadu merah, dadu mana yang kamu akan pilih? Apa kejutan di sini?

10. Pikirkan tiga kejadian A , B , dan C .
 - a. Gambarlah diagram Venn yang menyatakan situasi A dan B adalah saling lepas, A dan C adalah saling lepas, dan B dan C adalah saling lepas.
 - b. Gambarlah diagram Venn yang menyatakan situasi A dan B adalah saling lepas, A dan C adalah saling lepas, tetapi B dan C tidak saling lepas.

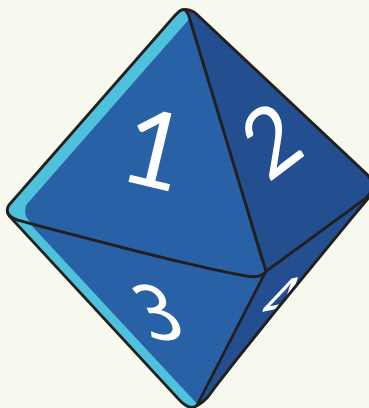
- c. Gambarlah diagram Venn yang menyatakan situasi A dan B tidak saling lepas, A dan C tidak saling lepas, dan B dan C tidak saling lepas. Gunakan diagram yang sesuai untuk membantumu menuliskan sebuah aturan penjumlahan yang dapat kamu gunakan untuk menentukan ketika
- d. A dan B adalah saling lepas, A dan C adalah saling lepas, dan B dan C adalah saling lepas.
- e. A dan B adalah saling lepas, A dan C adalah saling lepas, tetapi B dan C tidak saling lepas.
- f. A dan B tidak saling lepas, A dan C tidak saling lepas, dan B dan C tidak saling lepas.

Asesmen Diri

Pertanyaan Asesmen Diri	Bisa Mandiri	Bisa dengan Bantuan	Belum Bisa
1. Apakah saya sudah bisa menentukan ruang sampel kejadian?			
2. Apakah saya sudah bisa menentukan distribusi suatu kejadian?			
3. Apakah saya bisa membedakan antara kejadian saling lepas dan kejadian tidak saling lepas?			
4. Apakah saya bisa menggunakan aturan penjumlahan untuk menentukan peluang dua kejadian saling lepas?			
5. Apakah saya bisa menentukan peluang dua kejadian tidak saling lepas?			

Uji Kompetensi

1. Sebuah dadu dilempar, berapa peluang mendapatkan hasil berikut?
 - a. 4
 - b. 4 atau lebih
 - c. Kurang daripada 4
 - d. Bilangan genap
2. Dadu berbentuk oktahedral memiliki 8 sisi.
Misalnya kamu melemparkan dua dadu oktahedral dengan masing-masing sisi tertulis angka 1 sampai 8.



Gambar 7.8 Dadu Berbentuk Oktahedral

- a. Buatlah ruang sampel yang menunjukkan semua kemungkinan hasil.
 - b. Buatlah tabel distribusi peluang untuk jumlah kedua dadu tersebut.
 - c. Berapa peluang mendapatkan jumlah 8? Setidaknya jumlah 8?
 - d. Buatlah tabel distribusi peluang untuk nilai absolut dari selisih kedua dadu tersebut.
 - e. Berapa peluang mendapatkan selisih 6? Setidaknya selisih 6?
3. Untuk lemparan dua dadu berbentuk oktahedral, tentukan peluang kejadian berikut.
 - a. Peluang mendapatkan angka yang sama atau berjumlah 7?
 - b. Peluang mendapatkan angka yang sama atau berjumlah 8?
 - c. Peluang mendapatkan jumlah 7 atau jumlah 8?

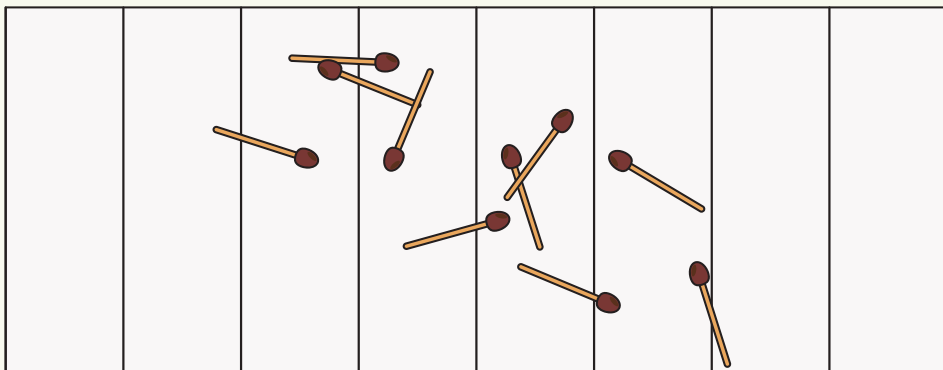
Pengayaan: _____

Percobaan Jarum Buffon (Proyek Aktivitas ICT)

Dalam aktivitas ini, kamu akan menggunakan aplikasi Spreadsheet, misalnya Microsoft Excel.

Bangsawan Prancis Le Comte de Buffon menciptakan sebuah percobaan peluang sebagai berikut.

1. Ukurlah panjang sebatang korek api (dengan bagian kepala dipotong) seakurat mungkin.
2. Pada sebuah kertas kosong gambarlah serangkaian garis yang saling sejajar. Jarak antara setiap garis haruslah sama panjangnya dengan batang korek api.
3. Ambillah sepuluh batang korek api yang sama panjangnya dan jatuhkan secara acak di atas kertas. Hitunglah jumlah korek api yang memotong atau menyentuh garis mana pun. Sebagai contoh dalam gambar berikut, jumlah korek api yang memotong atau menyentuh garis ada enam.



4. Ulangi percobaan sembilan kali lagi, dan catat hasilnya, sehingga keseluruhan kamu telah menjatuhkan 100 korek api.
5. Buatlah Spreadsheet yang mirip dengan yang di bawah ini dan masukkan hasilmu pada **cell B2**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Jumlah dijatuhkan (N)	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2	Jumlah korek memotong/ menyentuh garis (n)										
3	Peluang memotong garis ($p = n/N$)										
4	$\frac{2}{p}$										

6. Ulangi menjatuhkan 100 korek api lagi, sehingga total ada 200 kali, dan masukkan hasil kumulatif pada cell C2.
7. Dengan menggabungkan hasil dengan siswa lain, masukkan hasil kumulatif menjatuhkan korek api 300-1.000 kali di masing-masing cell D2-K2.
8. Dengan menggunakan rumus yang sesuai, gunakan Spreadsheet untuk menyelesaikan perhitungan di baris 3 dan 4.
9. Gunakan Spreadsheet untuk membuat plot grafik garis dari N terhadap $\frac{2}{p}$.
10. Nilai apa yang $\frac{2}{p}$ semakin mendekati?

Sumber: <https://www.mathsisfun.com/activity/buffons-needle.html>

Refleksi

Dalam bab ini, kamu sudah belajar bagaimana menentukan peluang menggunakan ruang sampel dari kejadian yang hasilnya sama kemungkinannya. Ayo, refleksikan kembali dengan menjawab pertanyaan berikut.

1. Apa itu distribusi peluang?
2. Apa itu kejadian yang saling lepas? Berikan contoh dua kejadian yang saling lepas. Berikan dua contoh kejadian yang tidak saling lepas.
3. Bagaimana menentukan ketika A dan B saling lepas dan ketika tidak saling lepas?



Glosarium

barisan bilangan	merupakan kumpulan bilangan yang memiliki urutan dan disusun menurut pola tertentu.
cosinus	perbandingan nilai sisi samping dan sisi miring sebuah sudut pada segitiga siku-siku.
clinometer	alat sederhana untuk mengukur sudut elevasi atau sudut depresi.
deret bilangan	penjumlahan suku-suku pada barisan bilangan.
deret divergen	deret bilangan yang tidak dapat ditentukan jumlahnya.
deret konvergen	deret bilangan yang dapat ditentukan jumlahnya.
distribusi peluang	deskripsi dari semua kemungkinan hasil dari situasi acak, bersama dengan peluang terjadinya masing-masing.
diskriminan	pembeda jenis-jenis akar persamaan kuadrat.
eksponen	nilai yang menunjukkan derajat kepangkatan suatu bilangan.
fungsi eksponensial	fungsi berbentuk perpangkatan dengan variabel bebasnya adalah pangkat dari konstanta fungsi tersebut.
fungsi kuadrat	adalah fungsi suku banyak dengan pangkat tertinggi variabelnya adalah 2.
kejadian saling lepas	kejadian di mana tidak mungkin untuk terjadi pada hasil yang sama.
peluang	kemungkinan yang mungkin terjadi/muncul dari sebuah peristiwa.
$P(A \text{ dan } B)$	peluang bahwa kejadian A dan B terjadi pada hasil yang sama.

P(A atau B)	peluang bahwa kejadian A atau B terjadi.
pertumbuhan eksponen	peningkatan secara eksponensial pada kurun waktu tertentu.
peluruhan eksponen	penurunan secara eksponensial pada kurun waktu tertentu.
ruang sampel	himpunan semua kemungkinan hasil yang didapatkan dari suatu percobaan peluang.
median	nilai data yang berada tepat di tengah Ketika seluruh data diurutkan dari yang terkecil sampai yang terbesar.
modus	data yang paling sering muncul atau memiliki Frekuensi paling besar.
jangkauan	selisih antara data terkecil dengan data terbesar.
line plot	garis bilangan dengan banyaknya tanda X menunjukkan banyaknya data yang muncul dengan nilai tertentu.
mean	bilangan yang diperoleh dengan mendistribusikan secara merata ke seluruh anggota dari kumpulan data.
kuartil	membagi kumpulan data menjadi 4 bagian sama besar.
linear	semua variabelnya berpangkat satu.
persamaan	kalimat terbuka yang memuat hubungan sama dengan “=”.
persentil	membagi kumpulan data menjadi 100 bagian sama besar.
pertidaksamaan	kalimat terbuka yang memuat hubungan tidak sama dengan (bisa berupa “≠”, “<”, maupun “>”).
pola bilangan	susunan angka-angka yang membentuk pola tertentu.

rasio	nilai perbandingan antara dua bilangan pada barisan dan deret geometri.
sinus	perbandingan nilai sisi depan dan sisi miring sebuah sudut pada segitiga siku-siku.
sistem	simultan.
solusi	nilai yang membuat persamaan (atau sistem persamaan) bernilai benar.
sumbu simetri	garis sumbu yang melalui titik puncak fungsi kuadrat.
tangen	perbandingan nilai sisi depan dan sisi samping sebuah sudut pada segitiga siku-siku.
theodolit	alat pengukur sudut yang biasa digunakan oleh juru tanah. titik puncak: titik terendah atau titik tertinggi pada fungsi kuadrat. trigonometri: studi pola bermakna mengenai hubungan antara sudut dan sisi segitiga.

Daftar Pustaka

- Attwood, G., Bettison, I. 2019. *Pearson Edexcel International A Level: Statistics*
1. Pearson Education Limited.
- Batanero, C., J Chernoff, E., Engel, J., Lee, H.S., & Sánchez, E. 2016. *Research on Teaching and Learning Probability*. Springer Nature.
- Brahier, D.J. 2020. *Teaching Secondary and Middle School Mathematics*.
Routledge.
- Brumbaugh, D.K., & Rock, D. 2010. *Teaching Secondary Mathematics*.
Routledge.
- Foster, C. 2012. *The Essential Guide to Secondary Mathematics: Successful and Enjoyable Teaching and Learning*. Routledge.
- Goos, M., Vale, C., Stillman, G., Makar, K., Herbert, S., & Geiger, V. 2020.
Teaching Secondary School Mathematics: Research and Practice for The 21st Century. Routledge.
- Hirsch, C. R. 2008. *Core-plus Mathematics: Contemporary Mathematics in Context. Course 1 Student Edition*. Glencoe/McGraw-Hill.
- Hirsch, C. R. 2008. *Core-plus Mathematics: Contemporary Mathematics in Context. Course 2 Student Edition*. Glencoe/McGraw-Hill.
- Jones, G. A. (Ed.). 2006. *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (Vol. 40). Springer Science & Business Media.
- Johnston-Wilder, S., & Pimm, D. 2004. *Teaching Secondary Mathematics with ICT*. McGraw-Hill Education (UK).
- Larson, R. 2011. *Algebra and Trigonometry, eighth edition*. Cengage Learning.
- Murdock, J., Kamischke, E., & Kamischke, E. 2007. *Discovering Algebra: An Investigative Approach, Second Edition*. Key Curriculum Press.
- Pimentel, R., Wall, T. 2013. *Mathematics Core and Extended, 3rd Edition*.
Cambridge IGCSE, Hodder Education
- <https://www.forbes.com/sites/naomirobbins/2012/01/04/a-histogram-is-not-a-bar-chart/?sh=13ebb1326d77>
- <https://corona.jakarta.go.id/id/data-pemantauan>

<https://www.mathsisfun.com/activity/buffons-needle.html>. Diunduh tanggal 18 Januari 2021 pukul 22.00 WIB.

[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_\(OpenStax\)/12%3A_Vectors_in_Space/12.1%3A_Vectors_in_the_Plane](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/12%3A_Vectors_in_Space/12.1%3A_Vectors_in_the_Plane). Diunduh pada tanggal 19 Januari 2021 pukul 21.52 WIB.

<https://www.maths.usyd.edu.au/u/MOW/vectors/vectors-7/v-7-1.html>. Diunduh pada tanggal 19 Januari 2021 pukul 21.52 WIB.

Sharma, R.D. 2001. *Objective Mathematics Textbook*. Dhanpat Rai Publications (P) Ltd.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. 2015. *Algebra and Trigonometry*. Cengage Learning.

Sutisna, E., 2020. *Modul Pembelajaran SMA, Matematika Peminatan Kelas X*. Kementerian Pendidikan dan Kebudayaan Indonesia.

Tan, S. 2008. *College Mathematics for the Managerial, Life, and Social Sciences, seventh edition*. Thomson Brooks/Cole.

Watson, A., Jones, K., & Pratt, D. 2013. *Key Ideas in Teaching Mathematics: Research-based Guidance for Ages 9-19*. OUP Oxford.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., Chow, I., Meng, N. C., & Liew, J. 2013. *New Syllabus Mathematics Textbook 1*. Shing Lee Publishers Pte Ltd.

Yeo, J., Seng, T. K., Yee, L. C., & Chow, I. 2013. *New Syllabus Additional Mathematics Textbook*. Shing Lee Publishers Pte Ltd.

University of Cambridge. “Power Countdown”, diakses pada tanggal
<https://nrich.maths.org/6448>

Sumber: <https://sikapiuangmu.ojk.go.id/FrontEnd/CMS/Article/20649>

Otoritas Jasa Keuangan, “Mengenal Jenis-Jenis Suku Bunga Bank.”
[Sikapiuangmu.ojk.go.id](https://sikapiuangmu.ojk.go.id).

<https://sikapiuangmu.ojk.go.id/FrontEnd/CMS/Article/20649>

OpenStax College. Precalculus. OpenStax. <http://cnx.org/contents/fd53eae1-fa23-47c7-bb1b-972349835c3c@5.175:1/Preface>.

nrich. Mega Quadratic Equations. <https://nrich.maths.org/problems/mega-quadratic-equations>

Daftar Sumber Gambar

Gambar kover buku dan bab diolah dari berbagai sumber gambar yang diunduh dari:

- <https://www.pexels.com/photo/silhouette-of-a-man-playing-basketball-13820499/> pada tanggal 11 November 2023 pukul 23.05 WIB
- <https://www.pexels.com/photo/a-boy-standing-near-the-ball-8941614/> pada tanggal 29 Oktober 2023 pukul 13.35 WIB
- <https://www.flickr.com/photos/188454520@N02/49913653136> pada tanggal 23 November 2023 pukul 09.19 WIB
- <https://www.pexels.com/photo/man-dunking-the-ball-163452/> pada tanggal 30 Oktober 2023 pukul 19.30 WIB
- <https://www.dreamstime.com/stock-image-surveyor-engineer-making-measure-field-image35957071> pada tanggal 15 November 2023 pukul 22.30 WIB
- <https://www.pexels.com/photo/person-solving-distance-of-points-2714073/> pada tanggal 17 November 2023 pukul 16.34 WIB
- <https://www.pexels.com/photo/aftermath-of-an-earthquake-in-bhaktapur-7806169/> pada tanggal 23 November 2023 pukul 19.32 WIB
- Savitri/kemendikbudristek (2023)

Gambar 2.7: diunduh dari https://id.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss#/media/Berkas:Carl_Friedrich_Gauss_1840_by_Jensen.jpg pada tanggal 28 Oktober 2023 pukul 20.23 WIB

Gambar 2.8 diunduh dari <https://pixabay.com/photos/flower-sunflower-plant-disk-flowers-94187/> pada tanggal 14 Oktober 2023 pukul 09.37 WIB

Gambar 3.1 diunduh dari <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Puncakjaya.jpg> pada tanggal 22 September 2023 pukul 11.24 WIB

Gambar 3.2 diunduh dari https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mount_Everest,_Himalayas.jpg pada tanggal 22 September 2023 pukul 13.34 WIB

Gambar 3.18 diunduh dari <https://unsplash.com/photos/HcgK4WoBwzg> pada tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.45 WIB

Gambar 3.25 diunduh dari https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jam_Gadang,_Bukittinggi,_2016-02-12_01.jpg pada tanggal 26 Oktober 2023 pukul 14.45 WIB

Gambar 3.26 diunduh dari https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Jembatan_Youtefa_2.jpg pada tanggal 27 Oktober 2023 pukul 15.15 WIB

Gambar 7.1 diunduh dari:

- https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Snakes_and_Ladders_board.jpg pada tanggal 28 Februari 2021 pukul 20.57 WIB;
- [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Monopoly_Barcelona_\(4022232563\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Monopoly_Barcelona_(4022232563).jpg) pada tanggal 19 Oktober 2023 pukul 16.27 WIB;
- <https://pixabay.com/photos/dice-six-gambling-to-play-689618/> pada tanggal 30 September 2023 pukul 09.08 WIB;
- <https://pixabay.com/photos/game-board-ludo-child-dice-blue-3723084/> pada tanggal 1 Oktober 2023 pukul 10.10 WIB.

Indeks

A

akar-akar persamaan kuadrat 157, 162

aturan penjumlahan 241, 255, 256, 262, 263, 264

Aturan Perkalian vi, 257, 269, 270

B

barisan aritmetika 39, 41, 43, 50, 53, 63, 64, 68

barisan bilangan 38, 39, 43, 45, 49, 52, 56, 272

barisan geometri 46, 47, 48, 49, 50, 57, 63, 64, 68

C

Clinometer 86, 87

D

dadu 242, 243, 244, 246, 247, 248, 249, 252, 256, 262, 263, 264, 265, 266

tetrahedron 262, 263

deret aritmetika 52, 53, 54, 55, 62

deret bilangan 52, 53, 55, 58, 59, 62

deret geometri 52, 56, 57, 59, 61, 62, 68

deret geometri tak hingga 61, 62, 68

diagram Venn 255, 256, 264

diskriminan 158, 164

distribusi peluang 241, 246, 247, 248, 249, 261, 262, 263, 264, 266, 268

Distribusi peluang 240

E

bentuk akar 21, 22, 23, 33

bilangan pokok 11, 29

eksponen 7, 9, 17, 18, 29, 30, 31, 33, 48

fungsi eksponensial 2, 11, 12, 14, 19, 27, 33, 167, 272

Peluruhan Eksponen 18

Pertumbuhan Eksponen 12

F

akar-akar persamaan kuadrat 157, 162

diskriminan 158, 164

terbuka ke atas 154, 155, 156, 157, 159, 160

terbuka ke bawah 154, 155

titik potong dengan sumbu x 157, 158, 167

titik potong dengan sumbu y 157, 159, 162

titik puncak 157, 159, 161, 163, 164, 167

Fungsi Kuadrat 154, 157, 160

K

kejadian 240, 241, 243, 246, 248, 250,
251, 252, 255, 256, 257, 264, 266,
268
saling bebas 240, 251, 252, 255, 256,
257, 262, 264, 265, 268
Kejadian 240
kejadian saling lepas 240, 255, 256

O

Orang tua 280, 282, 283, 284, 285,
286, 289, 293

P

Aturan Perkalian vi, 257
kejadian saling lepas 240, 255, 256
kejadian tidak saling bebas 256
percobaan 241, 266, 267
Aturan Penjumlahan 249
distribusi 180, 182, 187, 194, 241, 246,
247, 248, 249, 261, 262, 263, 264,
266, 268
Distribusi 240
Peluang 240, 241, 242, 244, 245, 246,
247, 248, 249, 255, 256, 266, 267
ruang sampel 240, 241, 243, 246, 247,
249, 261, 262, 263, 266, 268
Ruang sampel 240
percobaan 76, 86, 241, 266, 267

R

ruang sampel 240, 241, 243, 246, 247,
249, 261, 262, 263, 266, 268
Ruang sampel 240

S

segitiga 25, 64, 74, 75, 77, 78, 79, 80,
81, 82, 83, 84, 85, 89, 90, 94, 95,
96, 98, 99, 100, 101, 103, 262, 263
segitiga sebangun 75, 81, 82
Segitiga Siku-siku 77
segitiga siku-siku sama kaki 99
sumbu simetri 159, 163

T

tabel distribusi peluang 246, 247,
261, 262, 264, 266
tangen 72, 79, 90, 95, 103, 106, 274
teori Pythagoras 98, 99
Theodolit 73
cosinus 79, 84, 90, 95, 103
perbandingan trigonometri 74, 75,
79, 81, 82, 84, 86, 91, 92, 93, 94,
95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 104
sinus 79, 84, 90, 91, 94, 95, 103
sisi depan 78, 79, 80, 82, 84, 86, 89, 90
sisi miring 78, 84, 89, 90
sisi samping 78, 79, 80, 84, 90
Sudut Istimewa 97

trigonometri 74, 75, 77, 79, 81, 82, 84,
86, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98,
99, 100, 101, 104

U

angka 194, 222, 224, 226, 227, 228,
243, 244, 245, 246, 247, 248, 252,
256, 261, 262, 263, 264, 266
gambar 12, 24, 80, 81, 89, 94, 95, 100,
104, 165, 183, 185, 248, 261, 262,
263, 264, 267
uang logam 248, 261, 262, 263

Biodata Pelaku Perbukuan

Biodata Penulis

Nama Lengkap : Dicky Susanto, Ed.D
E-mail : dicky.susanto@calvin.ac.id
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 8, RMCI. Jl. Industri
Blok B14 Kav. 1 Kemayoran, Jakarta
Pusat 10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Head of Instructional Design dan Dosen, Calvin Institute of Technology (2019–sekarang)
2. Head of Instructional Design dan Dosen, Indonesia International Institute of Life Sciences (2016–2019)
3. Education Consultant, Curriculum Developer and Teacher Trainer (2015–sekarang)
4. Postdoctoral Research Associate, North Carolina State University (2012–2014)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2004-2009)
2. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan Matematika, Boston University, Massachusetts, USA (2002-2003)
3. S1: Program Studi Teknik Kimia, Institut Teknologi Indonesia, Tangerang (1992-1997)

Judul Buku dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. Pengarah Materi untuk Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Kelas Awal (Modul Belajar Siswa, Modul Guru, dan Modul Orang Tua) (2020-2021)

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (dalam 10 Tahun Terakhir):

1. “Coordinating Multiple Composite Units as a Conceptual Principle in Time Learning Trajectory” (2020)

Nama Lengkap : Theja Kurniawan
E-mail : theja.kurniawan@santa-laurensia.sch.id
Alamat Kantor : Jalan Sutera Utama No. 1, Alam Sutera,
Tangerang Selatan 15325
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

1. Kepala SMA Santa Laurensia (2013-sekarang)
2. Head of Mathematics Department, Sekolah Santa Laurensia (2006-2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Pendidikan, Universitas Pelita Harapan (2005-2007)
2. S2: Program Studi Manajemen Operasi, PPM (1999-2001)
3. S1: Program Studi Teknik Sipil, Universitas Tarumanagara (1994-1999)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Tidak ada.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Tidak ada.

Nama Lengkap : Savitri Sihombing, M.Sc.
E-mail : savitri.sihombing@gmail.com
Alamat Kantor : Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri Jalan Scientia Boulevard Barat Blok DRWB No. 8 Sektor Ruko Darwin, Summarecon Serpong Tangerang, Banten 15334
<https://www.yayasansimetri.or.id/>



Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika

Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Tim Akademik Matematika, Yayasan Sinergi Mencerdaskan Tunas Negeri (2017-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Applied Mathematics, University of Twente, Enschede, The Netherlands (2003-2005)
2. S1: Program Studi Teknik Elektro, Institut Teknologi Bandung, Bandung, Indonesia (1996-2001)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Dicky Susanto, dkk (2022), Matematika untuk SD Kelas VI, Kemdikbud, Jakarta.
2. Dicky Susanto dkk (2022), Matematika untuk SMP Kelas VII, Kemdikbud, Jakarta.
3. Dicky Susanto, dkk (2021), Matematika untuk SMA/SMK Kelas XI, Kemdikbud, Jakarta.
4. Dicky Susanto dkk (2021), Matematika untuk SMA/SMK Kelas X, Kemdikbud, Jakarta.
5. Direktorat SMP (2021), Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran Matematika untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama, Modul, Kemdikbud, Jakarta
6. Direktorat SMP (2021), Inspirasi Pembelajaran yang Memperkuat Numerasi Pada Mata Pelajaran IPA, IPS, PJOK, dan Seni Budaya untuk Jenjang Sekolah Menengah Pertama, Modul, Kemdikbud, Jakarta
7. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi

- Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1 Subtema 2, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Subtema 2, Tema 2 Subtema 3, dan Tema 3 Subtema 2, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
 9. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Subtema 2, Tema 2 Subtema 3, Tema 3 Subtema 2, Tema 4 Subtema 2, Tema 5 Subtema 2, Tema 6 Subtema 2, Tema 7 Subtema 2, Tema 8 Subtema 2, Tema 9 Subtema 2, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
 10. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 7 Bumi dan Benda di Langit Subtema 2 Bulan dan Bintang, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
 11. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 8 Profesi Subtema 2 Produsen, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
 12. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 9 Perayaan Subtema 2 Hari Besar Nasional, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Nama Lengkap : Eunice Salim, M.Ed.
E-mail : esalim@asu.edu
Alamat Kantor : Menara Calvin Lt. 13, RMCI. Jl.
Industri Blok B14 Kav. 1. Kemayoran,
Jakarta Pusat 10610, Indonesia
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. *Chief Networking Officer*, Paideia Educational Solutions, Bali, Indonesia (2020-sekarang)
2. Staf Kurikulum, Sekolah Kristen Calvin, Jakarta, Indonesia (2019-sekarang)
3. Guru Kelas 4 SD, Indian Hills Elementary, Gallup, USA (2016-2019)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Learning Design and Technologies, Arizona State University, Phoenix, USA (2017-2019)
2. S1: Program Studi Elementary Math Education, Calvin University, Grand Rapids, USA (2012-2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 4 Perasaanku*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 4 Mainan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 4 Mainan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

4. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 3 Pancaindra Subtema 4 Alat yang Membantu Pancaindra, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
5. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 3 Pancaindra Subtema 4 Alat yang Membantu Pancaindra, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
6. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
7. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
8. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 4 Memelihara Diri dan Lingkungan Kita Subtema 4 Bencana Alam, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
9. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
10. Pusmenjar (2020), Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 5 Lingkungan dan Alam Indonesiaku Subtema 4 Cuaca di Pulauku, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Nama Lengkap : Marianna Magdalena Radjawane, M.Si.
E-mail : marianna.radjawane@gmail.com
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika dan Fisika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Jarak Jauh STKIP Terang Bangsa Timika (2020-2022)
2. Konsultan Pendidikan, Pengembang Kurikulum dan Pelatih Guru (2013-sekarang)
3. Guru Fisika SMA Cita Buana Jakarta (2013-2015)
4. Divisi Pelatihan Guru Surya Institute (2007-2013)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Program Studi Pascasarjana Fisika, Institut Teknologi Bandung (1990-1993)
2. S1: Program Studi Astronomi, Institut Teknologi Bandung (1983-1989)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun Terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyenangkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1 Diriku Subtema 3 Aktivitas yang Menyenangkan*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa, Modul Pendamping Bagi Guru, dan Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 2 Tema 2 Makhluk Hidup dan Benda Mati di Lingkungan Kita Subtema 2 Serangga dan Hewan Kecil*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Nama Lengkap : Ummy Salmah, M.Pd.,M.Sc
 E-mail : ummysalmah87@gmail.com
 Instansi : SEAMEO QITEP in Mathematics
 Alamat Kantor : JL. Kaliurang KM 6, Sambisari,
 Condongcatur Depok, Sleman, DI
 Yogyakarta.
 Bidang Keahlian : Pendidikan matematika, Realistic
 Mathematics Education, STEM
 Education.



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika, Fakultas Tarbiyah UIN Alauddin Makassar (2016-2017)
2. Training Specialist, SEAMEO Regional Centre for QITEP in Mathematics, Yogyakarta (2017-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Science and Mathematics Education, Curtin University (2015)
2. S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2012-2014)
3. S1: Pendidikan Matematika, Universitas Negeri Makassar (2006-2010)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Buku Seri 1: Konsep Dasar Numerasi untuk Guru SD (2024). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
2. Buku Seri 2: Konsep Dasar Numerasi untuk Guru SD (2024). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
3. Matematika untuk SD/MI Kelas VI. (2022). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Ten-Structure as Strategy of Addition 1-20 by Involving Spatial Structuring Ability for First Grade Students. (2015). International Education Studies, 8(11), 16-252.
2. Mathematics Teachers' Perception and Readiness in Implementing STEM Education. (2017). SMTE Conference Proceeding.
3. Elementary school teachers' perceptions of STEM: What do teachers perceive? (2020). In Journal of Physics: Conference Series (Vol. 1581, No. 1, p. 012039). IOP Publishing.

Nama Lengkap : Ambarsari Kusuma Wardani, M.Pd.
E-mail : ambarsariks_uin@radenfatah.ac.id
Alamat Kantor : Jl. Prof. K. H. Zainal Abidin Fikri, Km
3.5, Palembang.
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Dosen Pendidikan Matematika, Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan, UIN Raden Fatah Palembang (2016-sekarang)
2. Guru Matematika, SMA Negeri 17 Palembang (2014-2016)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S2: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2012-2014)
2. S1: Pendidikan Matematika, Universitas Sriwijaya (2007-2011)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Buku Seri 1: Konsep Dasar Numerasi untuk Guru SD (2024). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
2. Buku Seri 2: Konsep Dasar Numerasi untuk Guru SD (2024). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
3. Literasi Matematis sebagai Kecakapan Abad 21. (2023), Numerasia, Surabaya.
4. Matematika untuk SD/MI Kelas VI. (2022). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.
5. Matematika untuk SMP/ Mts Kelas VII. (2022). Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. “Pengembangan E-Modul Berbasis Canva dengan Konteks Kearifan Lokal pada Pembelajaran Matematika Sekolah” (2022)
2. “Pengembangan Modul Numerasi Terintegrasi Nilai Islam untuk Siswa Sekolah Dasar” (2021)
3. “Pengembangan Soal Pemecahan Masalah Matematika dengan Konteks Islami untuk Siswa Sekolah Menengah Pertama” (2020)

Biodata Penelaah

Nama Lengkap : Prof. Dr. Sunardi, M.Pd.
E-mail : sunardi.fkip@unej.ac.id
Alamat Kantor : FKIP Universitas Jember, Jalan
Kalimantan Nomor 37 Jember
Bidang Keahlian : Pendidikan Matematika



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Sebagai dosen Pendidikan Matematika sejak tahun 1983 sampai sekarang
2. Sebagai Editor Buku Matematika Kelas VII tahun 2019
3. Sebagai Penelaah Buku Matematika Kelas X, XI, XII tahun 2021

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Pendidikan Matematika Universitas Negeri Surabaya tahun masuk 1999
2. S2: Pendidikan Matematika IKIP Malang tahun masuk 1992
3. S1: Pendidikan Matematika IKIP Malang tahun masuk 1977

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Titik Sugiarti, Dinawati Trapsilasiwi, Sunardi, Erfan Yudianto, . 2022. *Kapita Selekta: Relasi & Fungsi, Limit, Turunan, dan Integral*. UNEJ Press. 978-623-6039-91-5
2. Sunardi, Erfan Yudianto, Harina Fitriyani, M.Pd.. 2020. *Geometri Analitik: Tinjauan pada Bidang Datar*. KHD Production. 978-623-94790-8-4
3. Erfan Yudianto, Sunardi, . 2014. *Teori dan Soal-soal Geometri Analitika Bidang*. Jember University Press. 978-602-9030-73-0

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. Sunardi, Nurcholif Diah Sri Lestari, Dian Kurniati, Didik Sugeng Pambudi, 2023. The Mathematics Prospective Teachers Activities when Solving Mathematics Projects Outdoor Learning Mathematics Projects in the Campus Garden. *Mathematics Teaching Research Journal (MTRJ)*. 15(3). <http://siakad.unej.ac.id/commons.hostos.cuny.edu/mtrj/>
2. Sunardi, Erfan Yudianto, 2023. Ethnomathematics Exploration in Coffee Planting Activities at Durjo Jember Plantation. *International Journal of Current Science Reasearch and Review*. 6(3). <https://ijcsrr.org/single-view/?id=9824&pid=9555>

Nama Lengkap : Dr. Al Azhary Masta, M.Si.
E-mail : alazhari.masta@upi.edu
Instansi : Prodi Matematika FPMIPA UPI
Alamat Kantor : FPMIPA Universitas Pendidikan
Indonesia, Jl. Dr. Setiabudi No .229,
Isola, Kec. Sukasari, Kota Bandung,
Jawa Barat 40154
Bidang Keahlian : Matematika Analisis



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 tahun Terakhir:

Dosen Program Studi S1 Program studi Matematika FPMIPA Universitas Pendidikan Indonesia (2015 – sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S3: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2013 – 2018)
2. S2: Matematika, Institut Teknologi Bandung (2011 – 2013)
3. S1: Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia (2007 – 2011)

Judul Buku yang Pernah Ditelaah/Editor (10 tahun terakhir)

1. Buku digital pusat perbukuan untuk Program kelas IV, V, VI (2019)
2. Buku Siswa dan Guru Matematika SMA/ MA/ SMK kelas X. Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2020
3. Buku Siswa dan Guru Matematika Sekolah Dasar Kelas 1. Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2022
4. Buku Siswa dan Guru Matematika Sekolah Dasar Kelas 2. Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2022

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir)

1. *Math Project (Pembelajaran Matematika Berbasis Pendekatan Saintifik) untuk kelas I SD, IV SD, VII SD. Penerbit Yrama Widya Bandung pada tahun 2014.*
2. *Buku Siswa dan Guru Matematika Peminatan SMA/ MA/ SMK kelas X. Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2019*
3. *Buku Siswa dan Guru Matematika Tingkat Lanjut SMA kelas XI. Penerbit Pusat Perbukuan, Balitbang, Kemdikbud, tahun 2021*

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

Hasil Penelitian selengkapnya dapat dilihat di laman

Id Scopus 57189662322
Id Google Scholar 5cxkPMUAAAJ
Id Sinta 6007709

Biodata Ilustrator

Nama Lengkap : Faris Majduddin Naufal, S.M
E-mail : farismnaufal@gmail.com
Alamat Kantor : Monoponik Studio. Jl. Otto Iskandar
Dinata No. 458, Bandung
Bidang Keahlian : Desain Grafis & Ilustrasi



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Co Founder & Principal Designer, Monoponik Studio (2012-sekarang)
2. Marketing Staff (Internship), Mahanagari Nusantara (2012)
3. Visual Artist / Illustrator (2010-sekarang)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Manajemen Bisnis, Telkom University (2009-2015)

Karya/Pameran/Eksibisi dan Tahun Pelaksanaan (10 tahun terakhir)

1. 111 Buya Hamka Exhibition, Universitas Al Azhar, Jakarta (2019)
2. All The Small Things, Qubicle, Jakarta (2017)
3. Seek A Seek Exhibition (with Monoponik), Dia.Lo.Gue, Jakarta (2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 3 Tema 1,3-9 Subtema 3*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. “Pengaruh Word of Mouth Marketing Melalui Media Twitter @ FLAMEONfootmate Terhadap Keputusan Pembelian Konsumen Tahun 2014” (2015)

Biodata Penyunting Naskah 1

Nama Lengkap : Tri Hartini, S.S.
E-mail : trihartini2703@gmail.com
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Editing buku/naskah, proof read



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

2001–sekarang: Editor Freelance

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

S-1: Fakultas Sastra Universitas Gadjah Mada Yogyakarta jurusan Sastra Indonesia spesialisasi bidang Linguistik, 1992–1998

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

1. *Ideologi Fantasi dalam Sastra Indonesia*, Kanisius 2024
2. *Pancasila Jati Diri Bangsa Indonesia*, Kanisius 2023
3. *Pendidikan Pancasila SMP/MTs Kelas VII (Edisi Revisi)*, Pusbuk 2023
4. *Kumpulan Artikel Pendek Bank Indonesia*, Kanisius 2023
5. *Jujur Terhadap Pancasila*, Kanisius 2022
6. *Penulisan dan Penerbitan Artikel di Jurnal Internasional Bereputasi*, Kanisius 2022
7. *Menulis Esai Akademis, Buku Ajar Mata Kuliah Umum Bahasa Indonesia*, Kanisius 2022
8. *Matematika SD/MI Kelas VI*, Pusbuk 2022
9. *Buku Panduan Guru Matematika SD/MI Kelas VI*, Pusbuk 2022
10. *Matematika SMP/MTs Kelas VII*, Pusbuk 2022
11. *Buku Panduan Guru Matematika SMP/MTs Kelas VII*, Pusbuk 2022
12. *Analisis Model Kurikulum Operasional Satuan Pendidikan*, Pusbuk 2022
13. *Bahasa Indonesia SD/MI Kelas VI*, Pusbuk 2021
14. *Buku Panduan Guru Bahasa Indonesia SD/MI Kelas VI*, Pusbuk 2021
15. *Bahasa Indonesia SMP/MTs Kelas VII*, Pusbuk 2021

Biodata Penyunting Naskah 2

Nama Lengkap : Maharani Prananingrum, S.Si., M.A
E-mail : maharaniprananingrum@gmail.com
Instansi : Pusat Perbukuan Kemendikbudristek
Alamat Kantor : Kompleks Kemendikbudristek
(Gedung D) Jl. RS. Fatmawati, Cipete
Jakarta Selatan
Bidang Keahlian : Penyuntingan Naskah, Pengembang
Perbukuan



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

2005 – sekarang: Pusat Perbukuan Kemdikbudristek

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Matematika di Universitas Pendidikan Indonesia, 1998-2003
2. S2: Psikometrika Terapan di Fakultas Psikologi Universitas Gadjah Mada, 2016-2019

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

1. Matematika untuk SD/MI Kelas III, Pusat Perbukuan 2022.
2. Buku Panduan Guru Matematika untuk SD/MI Kelas III, Pusat Perbukuan 2022.
3. Panduan Penyelenggaraan PAUD Berkualitas Seri 9 – Lingkungan Belajar Partisipatif, Direktorat Pendidikan Anak Usia Dini 2022.
4. Buku Panduan Guru Dasar-Dasar Nautika Kapal Niaga untuk SMK/MAK Kelas X, Pusat Perbukuan 2022.

Judul Penelitian dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

1. Kajian Pemanfaatan Buku Guru dalam Proses Pembelajaran untuk Jenjang Sekolah Dasar, Pusat Perbukuan 2021

Biodata Editor Visual

Nama Lengkap : Is Yuniarto
E-mail : isyuniarto@gmail.com
Instansi : Wind Rider Studio
Alamat Kantor : Surabaya
Bidang Keahlian : Komik, ilustrasi, desain.



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Ilustrator dan komikus
2. General Manager Bumilangit Comic Media
3. Dosen honorer di Universitas Kristen Petra, Universitas Ciputra, iSTTS Surabaya.

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

S1 jurusan Desain Komunikasi Visual, Universitas Kristen Petra. 1999-2003

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 tahun terakhir):

1. Grand Legend Ramayana vol 7 – Reon Comics, 2023
2. Grand Legend Ramayana vol 6 – Reon Comics, 2022
3. Grand Legend Ramayana vol 5 – Reon Comics, 2020
4. Gundala Son of Lightning – Line Webtoon2., 2019
5. Garudayana Saga format scroll – Ciayo Comics, 2018
6. Grand Legend Ramayana Japan edition – Digital Catapult, 2016
7. Garudayana Saga Japan edition – Digital Catapult, 2015
8. Garudayana Saga vol 4-6 – CAB Publishing, 2015
9. Garudayana Saga vol 1-3 – CAB Publishing, 2014
10. Grand Legend Ramayana – Reon Comics, 2013

Biodata Penata Letak (Desainer)

Nama Lengkap : M. Firdaus Jubaedi
E-mail : muhafir@gmail.com
Alamat Kantor : -
Bidang Keahlian : Desain Grafis



Riwayat Pekerjaan/Profesi dalam 10 Tahun Terakhir:

1. Koordinator tim pengolah naskah Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh (2020-2021)
2. Staf pada Pusat Analisis dan Sinkronisasi Kebijakan (PASKA) Kemendikbud (2019-2020)
3. Staf pada Staf Ahli Mendikbud bidang pembangunan karakter (2018-2019)
4. *Audio Visual Designer* di Cita Rasa Prima Indonesia Berjaya (2016-2018)

Riwayat Pendidikan Tinggi dan Tahun Belajar:

1. S1: Desain Komunikasi Visual, Institut Teknologi Nasional Bandung (2011-2016)

Judul Buku dan Tahun Terbit (10 Tahun terakhir):

1. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Belajar Siswa Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
2. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Guru Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.
3. Pusmenjar (2020), *Modul Belajar Literasi dan Numerasi Jenjang SD Program Pembelajaran Jarak Jauh: Modul Pendamping Bagi Orang Tua Kelas 1 Tema 1-9 Subtema 1*, Modul, Kemdikbud, Jakarta.